МОДЕЛЬ АТОМА ВОДОРОДА БОРА – РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

А.П.Ефремов

Институт гравитации и космологии Российского университета дружбы народов

Аннотация
Дается краткий вывод условия стабильности кватернионной алгебры при конформном растяжении базовой спинорной поверхности; будучи записанным в физических единицах длины и времени, это условие точно совпадает с уравнением квантовой механики Шредингера. Разделение условия стабильности на действительную и мнимую части приводит к системе «универсальных» уравнений механики, эквивалентных уравнению Шредингера, но в то же время имеющих формат закона сохранения массы и уравнения Гамильтона-Якоби классической механики. Показано, что точным решением «универсальных» уравнений является решение, описывающее модель атома водорода Бора без привлечения постулатов квантования.

Ключевые слова: спинорная поверхность, кватернионы, квантовая механика, уравнения Шредингера, модель атома водорода Бора.

1. Введение. Математический вывод уравнений квантовой механики

Интерес к структуре фундаментальных квантовых объектов типа водородоподобных атомов по-прежнему не угасает (см., например, недавнюю работу [1]), несмотря на мнение, что исчерпывающий ответ на этот вопрос дан известным решением уравнений Шредингера. Предложенное ниже исследование демонстрирует возможность существования «легальных» альтернативных моделей.

Исходным пунктом этого исследования является факт возможности вывода уравнений квантовой механики из чисто математических соображений. Этот вывод связан с устойчивостью (или стабильностью) правила умножения единиц алгебры кватернионных (Q-) чисел, и кратко его можно описать следующим образом. Пусть $\{I, \mathbf{q}_k\}$ – некоторое представление Q-единиц (соответственно, скалярной и трех векторных: $k = 1,2,3$), удовлетворяющих закону умножения

$$I \cdot \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k \cdot I\,,\; \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n = -\delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j\,, \tag{1}$$

Где δ_{kn}, ε_{knj} – 3D символы Кронекера и Леви-Чивиты, есть суммирование по повторяющимся индексам. В работах [2,3] показано, что если на некоторой двумерной (2D-спинорной) поверхности, вообще говоря, комплексной, задан би-ортогональный базис (диада) единичных векторов $\psi^{\pm}$ и ковекторов $\varphi^{\pm}$

$$\varphi^{\pm}\psi^{\pm} = 1,\; \varphi^{\pm}\psi^{\mp} = 0\,, \tag{2}$$

то каждая из единиц $\{I, \mathbf{q}_k\}$ может быть представлена как прямое (тензорное) произведение так

$$I = \psi^+\varphi^+ + \psi^-\varphi^-\,,\; \mathbf{q}_1 = -i(\psi^+\varphi^- + \psi^-\varphi^+)\,,\; \mathbf{q}_2 = \psi^+\varphi^- - \psi^-\varphi^+\,,\; \mathbf{q}_3 = i(\psi^+\varphi^+ - \psi^-\varphi^-)\,, \tag{3}$$

что выполняется закон (1). Несложно видеть, что при этом $\psi^{\pm}$ и $\varphi^{\pm}$ являются правыми и левыми собственными векторами оператора $\mathbf{q}_3$, каждый со своим собственным значением $\pm i$.

Уравнения (1) очевидно не изменяют формы при преобразованиях подобия $\mathbf{q}'_k = S\,\mathbf{q}_k S^{-1}$, где $S \in SL(2,C)$; при этом из уравнений (3) следует соответствующий (спинорный) закон преобразования диады

$$\psi'^{\pm} = S\psi^{\pm},\ \varphi'^{\pm} = \varphi^{\pm} S^{-1}, \tag{4}$$

имеющий простой геометрический смысл поворотов векторов (ковекторов) диады на некоторый угол $\alpha \in R$, а 3D векторных единиц $\mathbf{q}_k$ – соответственно, на угол 2α. В частности, такой 3D поворот можно осуществить вокруг направления вектора $\mathbf{q}_3$, который внешне остается неизменным, тогда как его собственные векторы – составляющие диады – подвергаются фазовому преобразованию

$$\psi'^{\pm} = e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm},\ \varphi'^{\pm} = e^{\mp i\alpha}\varphi^{\pm}. \tag{5}$$

Наличие спинорной поверхности, «подлежащей» под 3D-пространством векторов $\mathbf{q}_k$, провоцирует применить еще один (не стандартный для кватернионов и их спиноров) тип преобразования [4,5]: конформное «растяжение» диады ($\sigma \in R$)

$$\psi''^{\pm} = \sigma e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm} \equiv \lambda^{\pm}\psi^{\pm},\ \varphi''^{\pm} = \sigma e^{\mp i\alpha}\varphi^{\pm} \equiv \lambda^{\mp}\varphi^{\pm}, \tag{6}$$

что, однако, приводит к дефекту σ^2 в основном законе алгебры (1) для Q-единиц, построенных по правилу (3) из составляющих «диады» (6). Чтобы сохранить алгебру, предлагается следующее. Во-первых, пусть факторы преобразования (6) являются функциями некоторого параметра θ и координат ξ_k абстрактного пространства **P**, пусть трехмерного (хотя это не обязательно)

$$\lambda(\theta,\xi_k) \equiv \sigma(\theta,\xi)\, e^{i\alpha(\theta,\xi)},\ \lambda^*(\theta,\xi_k) \equiv \sigma(\theta,\xi)\, e^{-i\alpha(\theta,\xi)}, \tag{7}$$

все величины в формуле (7) безразмерны (не имеют физических единиц). Во-вторых, пусть функция $\sigma^2(\theta,\xi)$ нормируема в некоторой области V_ξ пространства **P**

$$F \equiv \int_{V_\xi} \sigma^2(\theta,\xi)\, dV_\xi = \int_{V_\xi} \lambda\lambda^*\, dV_\xi = 1; \tag{8}$$

тогда Q-единицы $I'' = F\,I$, $\mathbf{q}''_k = F\,\mathbf{q}'_k$ удовлетворяют закону (1), то есть дефект «растяжения» ячейки 2D спинорного пространства сглаживается. Наконец, в-третьих, требование стабильности нормировки (8) в смысле параметра θ, то есть стабильности собственно Q-алгебры, $\partial F/\partial\theta = 0$, имеет своим следствием уравнение типа непрерывности

$$\partial_\theta \lambda\lambda^* + \nabla_\xi(\lambda\lambda^* \vec{k}) = 0\ , \tag{9}$$

где «вектор распространения» в простейшем случае определяется как направление увеличения фазы

$$\vec{k} = \nabla_\xi \alpha\ . \tag{10}$$

Выражение угла $\alpha = (i/2)\ln(\lambda^*/\lambda)$ из определения (7) с последующей подстановкой в уравнение (9) приводит к уравнению для функции λ

$$\left[\partial_\theta - \frac{i}{2}\left(\nabla_\xi{}^2 - 2W\right)\right]\lambda = 0\,, \tag{11}$$

где W – произвольная функция (здесь она будет считаться действительной); для сопряженной функции λ^* получается уравнение, комплексно сопряженное уравнению (11).
Используя определение (7), в уравнении (11) можно выделить действительную часть

$$\partial_\theta \sigma + \nabla_\xi \sigma \nabla_\xi \alpha + \frac{1}{2} \sigma \nabla_\xi^2 \alpha = 0 \tag{12}$$

и мнимую часть

$$\partial_\theta \alpha + \frac{1}{2}\left(\nabla_\xi \alpha\right)^2 + W - \frac{1}{2} \nabla_\xi^2 \sigma / \sigma = 0 . \tag{13}$$

Уравнения (12, 13) очевидно эквивалентны уравнению (11), которое по форме совпадает с уравнением Шредингера. Не сложно показать, что это совпадение оказывается полным, если абстрактное пространство **P** является физическим, параметр – временем; тогда

$$\xi_k = x_k / \varepsilon \;,\;\; \theta = t / \tau ;\;\; x_k = \varepsilon \xi_k \;,\;\; t = \tau \theta , \tag{14}$$

где ε и τ – характерные для конкретной модели пространственный масштаб и интервал времени. Поскольку уравнение (11) связывается с квантовой механикой, в качестве базового целесообразно использовать масштаб, включающий постоянную Планка

$$\varepsilon \sim \hbar / mu ,\;\; \tau = \varepsilon / u \sim \hbar / mu^2 , \tag{15}$$

здесь m – масса рассматриваемого тела (частицы), u – характерная для данного процесса скорость (предельный случай $u = c$). Подстановка соотношений (14, 15) в (11) дает в точности уравнение квантовой механики

$$\left(i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(x_k, t) \right) \lambda = 0 , \tag{16}$$

где все производные берутся по физическим переменным, а действительная функция $U \equiv mu^2 W$ имеет смысл потенциальной энергии системы.

Эквивалентная система уравнений (12, 13) приобретает вид уравнений Бома [6]

$$\partial_t \sigma + \frac{\hbar}{m} \nabla \sigma \nabla \alpha + \frac{\hbar}{2m} \sigma \nabla^2 \alpha = 0 , \tag{17}$$

$$\partial_t \alpha + \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla \alpha\right)^2 + \frac{U}{\hbar} - \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \sigma / \sigma = 0 . \tag{18}$$

Можно заметить, что если $\alpha \equiv S / \hbar$, где S – функция действия классической механики, то последние уравнения теряют квантовый множитель $\hbar$, при этом уравнение (17) приобретает вид «корня квадратного» из уравнения непрерывности, а уравнение (18) – вид уравнения Гамильтона-Якоби притом, что последние два слагаемых в нем отождествляются с потенциалом некоторой внешней силы. Так что уравнения (17) и (18), можно сказать, имеют универсальный характер – и квантовый, и классический.

Условие нормировки (8) в физических координатах преобразуется так

$$\frac{1}{\varepsilon^3} \int_V \sigma^2 (x, t)\, dV = 1 , \tag{19}$$

и, если фактор σ имеет смысл относительной «полуплотности» массы

$$\sigma \equiv \sqrt{\rho(x,t) / \rho_{mean}} \;, \tag{20}$$

где ρ_{mean} средняя плотность в рассматриваемом объеме, то условие (19) получает простую физическую интерпретацию

$$\int_V \rho (x, t)\, dV = \rho_{mean} \varepsilon^3 = m . \tag{21}$$

Данной трактовке соответствует предгеометрическая модель проточастицы в виде 2D-ячейки с компактным распределением «полуплотности» массы (сохраняющей распределение), распространяющейся в пространстве и «мерцающей» между действительной и мнимой плоскостью. При этом в физическом пространстве элементы 2D проточастицы «склеиваются» в 3D объект, который представляется наблюдателю как движущаяся точечная масса (материальная точка) с «вмороженной» в нее вращающейся триадой векторов $\mathbf{q}_k$.

2. Атом водорода Шредингера

Решение уравнений (16) для атома водорода хорошо известно; однако полезно рассмотреть его с точки зрения вышеописанной модели. Для простоты достаточно ограничиться круговыми орбиталями. Обычно рассматривается так называемое стационарное решение (ниже предложен другой вариант характеристики), соответствующее в принятых здесь обозначениях случаю

$$\lambda(r,t) \equiv \sigma(r)\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}\,,\ E = const\,; \tag{22}$$

$$U(r) = \frac{q^2}{r}, \tag{23}$$

q – элементарный электрический заряд. Уравнение (16) здесь можно записать так

$$-E = \frac{1}{\sigma}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\sigma}{dr}\right) + \frac{q^2}{r}. \tag{24}$$

Его, как правило, переписывают в безразмерных величинах $y \equiv r/a$, $w \equiv E/E_0$, где

$$a = \hbar^2/(mq^2), \tag{25}$$

$$E_0 = mq^4/(2\hbar^2), \tag{26}$$

для функции $s \equiv \sigma/r$, так что это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 s}{dy^2} + \frac{2s}{r} + ws = 0. \tag{27}$$

Решение ищется в виде

$$s = e^{-\sqrt{-w}\,y}\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu r^{\nu+1},$$

что, как известно, приводит к выражению для уровней энергии

$$\sqrt{-w} = 1/(\nu+1)^2 \equiv 1/n^2,\ \ E = -E_0/n^2 \tag{28}$$

и к полиномам Лягерра для функции $s \equiv \sigma/r$. Однако не лишне провести анализ этого хрестоматийного решения с точки зрения «универсальных» уравнений (17, 18). Сразу видно, что при условии (22) уравнение (24) сводится к уравнению (18), тогда как уравнение (17) *тривиально удовлетворяется*, так как фаза не зависит от координат. Но уравнение (17) есть динамическое уравнение для «полуплотности» массы электрона, и поскольку здесь оно оказывается не задействованной частью полного уравнения Шредингера, то данное решение носит *статический* (а не стационарный) характер. Пред-геометрический образ проточастицы для этой модели дополнительно иллюстрирует ситуацию: это неподвижная (в физическом пространстве) 2D-ячейка, функция «полуплотности» которой $\sigma(r)$ определена в 3D сферической окрестности, имеющей характерный радиус r_n так, что «полуплотность» массы «перекачивается» из действительного сектора ячейки в ее мнимый сектор с постоянной циклической частотой $E_n / \hbar$. Соответствующий 3D образ представлен Q-триадой (с началом в центре симметрии), вращающейся с частотой $2E_n / \hbar$; в целом система неподвижна в пространстве, т.е., как отмечено выше, является статической.

Завершая этот раздел, стоит напомнить, что соотношения (25, 26), определяющие соответственно радиус нижней орбитали и уровень энергии на ней электрона были вычислены Н.Бором из «полуклассических» соображений; в то же время они характерны для уравнений Шредингера. Если к тому же считать длину (25) характерным масштабом данной модели, то, сопоставляя ее с первой из формул (15), легко определить характерную скорость

$$u = \frac{q^2}{\hbar} = \frac{q^2}{\hbar c} c \cong \frac{1}{137{,}036} c, \qquad (29)$$

то есть это скорость электрона на нижней орбите «по Зоммерфельду», развивавшему идеи Бора. Это наводит на мысль, что модель Бора может иметь отношение не только к классическим уравнениям динамики (с соответствующими квантовыми постулатами), но также и к уравнению Шредингера. Проверке этого предположения посвящен следующий раздел.

3. Атом водорода Бора

Если вместо общего уравнения Шредингера (16) рассматривать его расщепленные эквиваленты (17, 18), то возможен поиск другого решения, которое можно характеризовать как стационарное, понимая по этим установившееся орбитальное движение. А именно, если электрон действительно обращается вокруг ядра по круговой орбите, то можно ожидать не «статического» вращения Q-триады, а волнового решения с фазой

$$\alpha = k\varphi - \omega t, \qquad (30)$$

где k – угловое волновое число, φ – азимутальный угол сферических координат в 3D пространстве, ω – циклическая частота гармонического «мерцания» 2D-ячейки, 2ω – частота вращения Q-триады, связанной с частицей. При этом в стационарном случае и масштабный фактор может быть функцией времени, а также функцией угловой и радиальной координат, в данной задаче эту зависимость целесообразно представить так

$$\sigma = g(t,\varphi)\, f(r); \qquad (31)$$

предполагается, что в центральном поле протона движение частицы плоское (по круговой орбите), полярный угол сферических координат равен π/2. После подстановки функций (30, 31) уравнения (17, 18) соответственно преобразуются к виду

$$\partial_t g + \frac{k\hbar}{mr^2} \partial_\varphi g = 0, \qquad (32)$$

$$\omega\hbar + \frac{k^2\hbar^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{r} - \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{f\,r^2}\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{g\,r^2}\partial_\varphi\partial_\varphi g\right] = 0. \qquad (33)$$

Если последнее слагаемое, умноженное на r^2, перенести в правую часть уравнения (33), то переменные разделяются. Каждая из независимых частей есть константа, которую удобно представить в виде $-\mu^2 \dfrac{\hbar^2}{2m}$, где μ – число (параметр), значение которого предстоит определить; знак минус выбран так, чтобы функция g^2 была периодической по азимуту. Тогда из уравнения (33) для g следует уравнение

$$\partial_\varphi\partial_\varphi g + \mu^2 g = 0,$$

имеющее решение

$$g = A\sin\left(\mu\varphi + \gamma\right), \tag{34}$$

$A = const$, $\gamma = \gamma(t)$. Условие нормировки

$$\int_0^{2\pi} g^2 d\varphi = \frac{A^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 - \cos 2\left(\mu\varphi - \gamma\right)\right]d\varphi = \frac{A^2}{2}\{2\pi - \frac{1}{2\mu}[\sin\left(4\pi\,\mu + 2\gamma\right) + \sin 2\gamma]\} = 1 \tag{35}$$

налагает ограничения на параметр μ: $\mu \neq 0$,

$\mu = n/2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Достаточными здесь оказываются только значения натурального ряда

$$n = 1, 2, 3\ldots, \tag{36}$$

поскольку отрицательные значения n определяют встречное движение. Из уравнения (35) также определяется значение амплитуды $A = 1/\sqrt{\pi}$, так что функция g приобретает вид

$$g(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\left[\frac{n}{2}\varphi - \gamma(t)\right], \tag{37}$$

при этом фазовая скорость волны (37)

$$\Omega \equiv \dot{\varphi} = \frac{2\dot{\gamma}}{n} \tag{38}$$

есть угловая скорость обращения частицы по орбите.

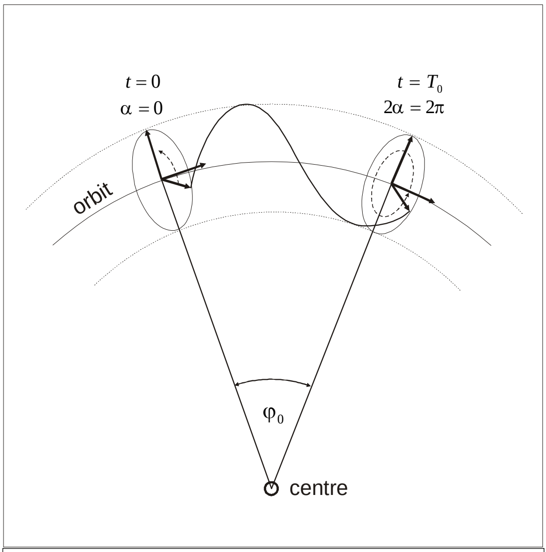

Рис.1. Движение частицы по орбите и вращение связанной с ней Q-триады

Существует зависимость между угловой скоростью Ω и циклической частотой вращения Q-триады 2ω. Действительно, если $\alpha = \pi$, то Q-триада совершает один оборот на угол 2π за период T_0; пусть при этом частица смещается по круговой орбите на угол φ_0

$$\pi = k\varphi_0 - \omega T_0. \tag{39}$$

Тогда, поскольку движение стационарно,

$$\Omega = \varphi_0 / T_0\ . \tag{40}$$

Но угловое волновое число k показывает, во сколько раз «угловая длина волны» φ_0 меньше угла полной окружности

$$\varphi_0 = 2\pi / k , \tag{41}$$

и из соотношений (39, 41) также следует

$$T_0 = \pi / \omega . \tag{42}$$

Подстановка формул (41, 42) в определение (40) приводит к искомому соотношению циклических частот

$$\Omega = \frac{2\omega}{k} . \tag{43}$$

Соотношения (38) и (43) очевидно совместны при выполнении условий

$$\dot{\gamma} = \omega = n\Omega / 2 , \tag{44}$$

$$k = n . \tag{45}$$

В этом случае функция (37) записывается как

$$g(\varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{n}{2}(\varphi - \Omega t)\right], \tag{46}$$

и ее подстановка в уравнение (32) [при учете значений параметра (36)] приводит к выражению, в точности имеющему вид условия квантования момента импульса электрона, постулированного Бором

$$m\Omega_n r_n^2 = n\hbar . \tag{47}$$

Условие (45) также означает, что на длине круговой орбиты частицы должно укладываться целое число «волн вращения Q-триады» с фазой (30), в полном соответствии с гипотезой де Бройля. При этом, как отмечено выше, в физическом пространстве наблюдается масса, импульс и энергия которой определяются как производные функции действия, пропорциональной фазе

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} = -\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\omega\hbar , \tag{48}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{r\partial\varphi} = \frac{\hbar}{r}\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{n\hbar}{r} = m\Omega r . \tag{49}$$

Подстановка решения (46), соотношений (48, 49) и замена функции $s \equiv f r$ приводит уравнение (33) к виду

$$-E + \frac{p_\varphi{}^2}{2m} - \frac{q^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial_r\partial_r s}{s} - \frac{n^2}{4r^2}\right). \tag{50}$$

Левая часть уравнения (50), записанная для массивного тела, теряет множитель $\hbar$ и, будучи приравненной нулю, представляет собой уравнение Гамильтона-Якоби, описывающее движение классической частицы по окружности в поле кулоновского потенциала

$$-E + \frac{p_\varphi{}^2}{2m} - \frac{q^2}{r} = 0 , \tag{51}$$

что эквивалентно уравнению Ньютона

$$\frac{p_\varphi{}^2}{mr} = \frac{q^2}{r^2}. \tag{52}$$

Из уравнений (52, 47) сразу следует решение для атома водорода Бора, включая известные соотношения, которые полезно напомнить: радиус орбиты электрона

$$r_n = an^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{mq^2}, \tag{52}$$

угловая скорость обращения по орбите

$$\Omega_n = \frac{n\hbar}{mr_n^2} = \frac{mq^4}{n^3\hbar^3}, \tag{54}$$

циклическая частота «вращения» диады, определяющая энергию электрона на боровской орбите

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{n^2\hbar}{2mr_n^2} = \frac{mq^4}{2n^2\hbar^3}. \tag{55}$$

В данной модели атома правая часть уравнения (50) есть часть независимого уравнения, определяющего зависимость «полуплотности» частицы от радиальной координаты. В рассматриваемом простейшем случае это уравнение имеет вид

$$\partial_r \partial_r s - \frac{n^2}{4r^2} s = 0; \tag{56}$$

решением является функция

$$s = Br^{\frac{1-\sqrt{1+n^2}}{2}}, \; f = s/r = Br^{-\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{2}}, \tag{57}$$

знак «минус» перед радикалом приводит к убыванию «радиальной полуплотности» f при увеличении главного квантового числа n; постоянный коэффициент B определяется для каждой квантовой орбиты из условия нормировки

$$f_n^2 r_n^2 = B^2 r_n^{1-\sqrt{1+n^2}} = 1. \tag{58}$$

В более общем случае потенциал U, фигурирующий в уравнении (16) и представленный в вышеприведенных задачах лишь функцией центрального электрического заряда, может содержать дополнительные слагаемые (в частности, – как любой потенциал – постоянное число). При рассмотрении модели Бора эти слагаемые естественно должны быть отнесены к уравнению для функции f (или s), тогда уравнение (51) может иметь более сложной вид и решение, отличное от решения (52). Однако, понятно, что для модели Бора, где строго определен радиус траектории частицы, знание функций «полуплотности» типа (52) носит формальный характер в силу нормировки соответствующей функции плотности на каждой орбите.

Итак, полученное в данном разделе решение, по сравнению с решением Шредингера, имеет существенно иную геометрическую трактовку. В этом решении реализуется модель атома типа модели Бора, в которой частица движется по одной из круговых орбит радиуса (52) с угловой скоростью (54); при этом связанная с частицей Q-триада вращается с частотой (55). На первой орбите ($n = 1$) угловая частота орбитального обращения равна частоте вращения триады; здесь же с помощью соотношений (47, 52) определяется значение характерной для этой модели скорости

$$u_1 = \Omega_1 r_1 = \hbar/(mr_1),$$

совпадающее со значением (29).

Но в данной модели есть геометрическое отличие от модели Бора, где на орбите – точечная масса. Отличие состоит в том, что здесь на каждой круговой орбите задается гармоническое распределение массы с натуральным множителем при азимутальной координате, так что на орбите с номером n одна частица описывается функцией плотности, которая имеет n одинаковых максимумов. Иными словами, масса частицы все более равномерно распределяется по длине орбиты с увеличением ее номера, что соответствует представлению не о точке, а о кольце, тем более что на каждой орбите момент инерции (а, следовательно, и момент импульса) точечной массы такой же, как и у тонкого кольца.

4. Обсуждение

Полезно отметить три следующих аспекта, которые в вышеприведенном исследовании представляются существенными.

Во-первых, полученное в разделе 3 решение, соответствующее (в известном смысле) модели Бора, является, конечно, сугубо частным решением уравнений квантовой механики. Более того, это весьма грубое решение, поскольку оно получено только для строго круговых экваториальных орбит, на которых «размер» частицы учитывается лишь по азимутальной координате (тогда как «размер» по радиальной координате и полярному углу игнорируется). Но дело не только в этом; даже в рассмотренном случае упрощенных уравнений можно искать другие решения, варьируя знак постоянного параметра μ^2 или выбирая иные условия совместности, отличные от условий (44, 45).

Во-вторых, условие стабильности Q-алгебры (16) и его составляющие (17, 18), очевидно, следует считать математическим прототипом универсального уравнения механики, записанного в терминах 2D пред-геометрических характеристик трехмерного пространства. В зависимости от выбора пространственных и временных масштабов и связанного с ними определения эталонного момента импульса частицы, это универсальное уравнение в физическом пространстве приобретает форму либо уравнения Шредингера, либо уравнения Гамильтона-Якоби (с законом сохранения массы), то есть, по сути, оно равно применимо для решения квантовых и классических задач механики.

Наконец, в-третьих, встает вопрос о реальности (или виртуальности) базовой в данном подходе пред-геометрической поверхности (2D-ячейки). Не исключено, что такая поверхность – всего лишь теоретическая конструкция, присущая специфике кватернионной математики, хотя и приводящая к формулировке точных аналогов физических законов. Однако в таком случае причины квантовых свойств частиц в физическом пространстве остаются неясными. И наоборот, рассматривая множество 2D-ячеек как фундаментальную (хотя и плохо представимую) сущность, можно выстраивать «ответственные за квантование» геометрические схемы микроструктуры 3D пространства. Представлению такого рода схем будут посвящены последующие работы.

Литература

1. S. Olszewski, “Energy Change and Time of the Electron Transitions in the De-Excitation Process of a Hydrogen-Like Atom”. Quantum Matter, Vol. 1, No 1, 2012, pp. 59-62.
2. P.Lancaster, M.Tismenetsky, The Theory of Matrices, Secons Edition with Applications, Academic Press, San Diego, USA, London, UK (1985), P.154.
3. A.P.Yefremov, “Splitting of 3D Quaternion Dimensions into 2D Cells and a “World Screen Surface Geometry”. Adv.Sci.Lett.Vol. 5, 2012, pp.288–293,.
4. A.P.Yefremov, “The Schrödinger Equations as a Consequence of the Quaternion Algebra Stability”. Gravitation and Cosmology, Vol.18, No.4, 2012, pp.239-241.
5. A.P.Yefremov, “Pre-Geometric Structure of Quantum and Classical Particles in Terms of Quaternion Spinors”. Gravitation and Cosmology, Vol. 19, No. 2, 2013, pp. 71-78.
6. D.Bohm, “A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I”. Phys. Rev., Vol. 85, 1952, pp. 166–179.