ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
КВАТЕРНИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе для простоты дальнейшего чтения рассмотрены элементы алгебры комплексных чисел и классической алгебры кватернионов.

1.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

Определение

Комплексное число (в декартовой форме) – это математический объект вида $z = a + ib$, где a, b – действительные числа, причем a есть множитель при действительной единице 1 (которая традиционно не пишется), а величина i носит название мнимой единицы; для нее постулируется соотношение $i^2 = -1$, из которого следует $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. По традиции число a называтся действительной частью комплексного числа z: $a = \operatorname{Re} z$, b – мнимой частью: $b = \operatorname{Im} z$. Все числа типа $z = a + ib$ образуют множество комплексных чисел **C:** $z \in \mathbf{C}$.

Представления мнимой единицы

Во времена становления математики комплексных чисел (первые упоминания о них относятся к XVI веку) мнимые числа имели едва ли не мистический смысл. Клейн [36] приводит следующие слова Лейбница: «Мнимые числа – самое подходящее место для обитания божественного духа, эти числа представляются мне промежуточным состоянием между бытием и небытием». С современной точки зрения, мнимые числа не менее реальны, чем действительные. Можно записать любое мнимое число с использованием одних лишь действительных чисел. Достаточно сделать это для мнимой единицы. Поскольку среди «обычных» чисел мнимой единицы нет, целесообразно обратиться к множеству со структурно более сложными элементами, например – к множеству 2×2-матриц, где действительной единицей является матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Легко подсчитать, что всякая 2×2-матрица вида $\mathbf{i} = \dfrac{A}{\sqrt{\det A}}$, где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, a, b, c - любые числа, удовлетворяет равенству $\mathbf{i}^2 = -\mathrm{E}$, т.е. является «мнимой» единицей. Очевидное специфическое свойство матрицы $\mathbf{i}$ – равенство нулю её следа $Sp\,\mathbf{i} = 0$. Простой пример такой единицы – матрица, состоящая из нулей и вещественных единиц $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (такая матрица традиционно обозначается другим символом – $\mathbf{j}$). Подобных величин со свойствами мнимой единицы можно построить много, например, в множествах матриц более высокого ранга. Однако для работы с комплексными числами вид конкретных представлений мнимой единицы не требуется.

Сравнение, сложение и умножение комплексных чисел

Очевидно, операция сравнения комплексных чисел, в отличие от сравнения действительных чисел, не имеет смысла. Можно говорить лишь о равенстве комплексных чисел. Два комплексных числа $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$ равны, если по отдельности равны их действительные и мнимые части

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c, \quad b = d.$$

При сложении (вычитании) комплексных чисел их действительные и мнимые части складываются (вычитаются) отдельно. Пусть $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$; тогда

$$z_1 \pm z_2 = a \pm c + i(b \pm d).$$

Умножение комплексных чисел осуществляется по правилу умножения многочленов

$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac - bd + i(bc+ad)\,.$$

Определенные таким образом сложение и умножение коммутативны

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1\,, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1\,,$$

ассоциативны

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\,, \quad (z_1 z_2) z_3 = z_2 (z_1 z_3)$$

и дистрибутивны

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3\,.$$

Операция комплексного сопряжения

Всякому комплексному числу $z = a + ib$ может быть поставлено в соответствие сопряженное ему число $\bar{z} = a - ib$. Используя операцию сопряжения, легко выделить действительную $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ и мнимую $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ части числа z. Для сопряженых чисел справедливы следующие равенства

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2\,.$$

Кроме того, с помощью операции сопряжения вводится одна из важнейших характеристик комплексного числа – его модуль: неотрицательное действительное число, равное арифметическому квадратному корню из суммы квадратов действительной и мнимой частей

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

или

$$z\bar{z} = |z|^2\,.$$

Пусть число z есть произведение двух чисел z_1 и z_2. Тогда из последнего равенства следует

$$|z|^2 = |z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2\,,$$

т.е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей.

В развернутом виде это нетривиальное равенство известно под именем «тождества квадратов». При $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ оно записывается как

$$(ab - cd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

и, традиционно, читается справа налево: произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов есть снова сумма двух квадратов. Проблема поиска аналогичных тождеств, но с большим, чем два, числом квадратов, долгое время привлекала внимание математиков. Окончательно она была решена к концу XIX века, когда завершилось формирование основ теории кватернионов и других гиперкомплексных чисел.

Деление комплексных чисел

Наконец, введение сопряжения позволяет определить для комплексных чисел операцию деления. Частное x от деления числа $z_1 = a + ib$ на число $z_2 = c + id$ (не равное нулю) может быть представлено как решение уравнения

$$z_1 = x z_2\,.$$

После домножения на число, сопряженное z_2, это уравнение имеет вид

$$z_1\bar{z}_2 = x|z_2|^2,$$

откуда определяется частное

$$x = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}, \text{ или } \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Очевидно, что частное от деления комплексных чисел определяется однозначно и также является комплексным числом.

Алгебра и поле комплексных чисел

Множество всех комплесных чисел есть алгебра размерности 2 (по числу базисных единиц), т.к. в нем, в соответствии с определением алгебры, заданы операции умножения на действительное число, сложения и умножения комплексных чисел.

Это очень хорошая алгебра в том смысле, что ее свойства чрезвычайно близки свойствам алгебры действительных чисел. А именно, алгебра комплексных чисел коммутативна и ассоциативна и по сложению, и по умножению, дистрибутивна, имеет единицу (каковой является действительная единица), в ней определены вычитание и деление. В силу перечисленных свойств, алгебра комплексных чисел, как и можество действительных чисел, является полем (или рациональным - коммутативным - кольцом).

Кроме того, это так называемая нормированная алгебра: в ней определяется норма (модуль) ее элементов и выполняется тождество квадратов. Свойство нормируемости характеризует «высокое качество» алгебр, имеющих размерность 2 и выше.

Геометрический образ множества комплексных чисел

Множество действительных чисел **R** одномерно в том смысле, что всякое число $a \in \mathbf{R}$ может быть изображено точкой на линии. Обратно, любой точке на линии может быть однозначно поставлено в соответствие некоторое число из **R**: натуральное, целое, рациональное или иррациональное. Поэтому геометрическим образом множества (поля) действительных чисел является линия, чаще всего прямая (числовая ось) или окружность.

Всякое комплесное число характеризуется двумя числами из **R**, так что все множество комплексных чисел **C** представляет собой два набора действительных чисел и в этом смысле двумерно. Поэтому геометрически поле **C** может быть представлено в виде двумерной поверхности. Чаще всего это плоскость, назывемая комплексной плоскостью; на ней вводится ортогональная система координат: ось действительных чисел **R** и ось мнимых чисел **I**, с началом в точке 0. Тогда произвольная точка $z \in \mathbf{C}$ характеризуется двумя декартовыми координатами *a,b,* что соответствует комплексному числу $z = a + ib$. Сопряженное число $\bar{z} = a - ib$ расположено симметрично *z* относительно мнимой оси.

Полярная форма комплексных чисел

Ясно, что вид комплексного числа зависит от выбора системы координат. Можно, например, представить число $z = a + ib$ в полярной форме. При этом его характеризуют полярные координаты: модуль числа z, равный длине отрезка *0z* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, и аргумент α – положительный (отсчитывемый против часовой стрелки) угол между осью **R** и отрезком 0z. Аргумент определяется с точностью до слагаемого $2\pi n$ (*n* - действительное целое число) и выражается через декартовы координаты следующим образом

если $a > 0, b \ge 0$, то $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$;

если $a < 0, b \ge 0$, то $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$;

если $a<0, b<0$, то $\alpha=\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$;

если $a>0, b<0$, то $\alpha=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$;

если $a=0$, то при $b>0$ $\alpha=\frac{\pi}{2}$, при $b<0$ $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.

Обратно, декартовы координаты выражаются через полярные так

$$a=|z|\cos\alpha, \quad b=|z|\sin\alpha.$$

Теперь число z может быть представлено в виде

$$z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Такая форма записи комплексного числа носит название полярной, или тригонометрической. С использованием формулы Эйлера

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$$

полярная форма становится весьма компактной $z=|z|e^{i\alpha}$ и удобной для операций умножения и деления комплексных чисел, возведения в степень и извлечения корней. Если $z_1=|z_1|e^{i\alpha_1}$, $z_2=|z_2|e^{i\alpha_2}$, то

$$z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} \qquad (\text{при } |z_2|\neq 0);$$

$$z^k=|z^k|e^{ik\alpha}, \qquad \sqrt[k]{z}=\sqrt[k]{|z|}\,e^{i\frac{\alpha}{k}} \quad (k \text{ - натуральное число}).$$

Сфера Римана

Множеству комплексных чисел может быть поставлена в соответствие не только плоскость, но и другая поверхность. Например, иногда используется сферическое изображение. В трехмерном пространстве вводится ортогональная система координат ξ,η,ζ, причем ξ и η соответственно совпадают с осями x и y комплексной плоскости. Точки плоскости стереографически проецирутся на сферу единичного радиуса S: $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ (сферу Римана). А именно, каждой точке плоскости $z(x,y)$, через которую проходит луч, выходящий из полюса с координатами $N=(0,0,1)$, ставится в соответствие точка $Z(\xi,\eta,\zeta)$ пересечения луча с поверхностью сферы. Формулы стереографической проекции для прямого преобразования

$$\xi=\frac{2x}{1+|z|^2}, \quad \eta=\frac{2y}{1+|z|^2}, \quad \zeta=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

и обратного преобразования координат

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta}, \qquad y=\frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Если при этом полюс N формально отождествить с бесконечной точкой $z=\infty$, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и сферой Римана. Последняя, в отличие от плоскости, являет собой геометрический образ компактного множества комплексных чисел (с присоединенной границей), обозначается символом $\overline{\mathbf{C}}$ и используется в анализе функций комплексного переменного.

Условия комплексной дифференцируемости

Не углубляясь в детали формализма введения функций комплексного переменного, резонно остановиться на условиях их дифференцируемости; аналогичная проблема встретится в разделе, посвященном кватернионным функциям.

Понятие дифференцируемости в комплексном анализе базируется на известных представлениях о производных в множестве **R.** Функция $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $z = x + iy$, **R**-дифференцируема в точке *z*, если ее дифференциал представим в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, \qquad \text{где } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы **R**-дифференцируемость являлась **C**-дифференцируемостью оказывется комплексное уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

которое, будучи записанным в виде двух действительных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

носит название условий аналитичности[3] Коши-Римана.

Нетривиальным представляется тот факт, что уравнения комплексной дифференцируемости, полученные исключительно с позиций формальной логики, оказываются идентичными уравнениям, которые описывают физическое явление: стационарное плоскопараллельное течение жидкости без источников и вихрей. Действительно, в случае плоского движения скорость жидкости имеет две компонены, зависящие от двух координат. Если определить вектор скорости как градиент части *u*(*x*,*y*) комплексного потенциала $f(z)$

$$v = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = v_x + iv_y,$$

то условия потенциальности (отсутствия вихрей)

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

и соленоидальности (отсутствия источников)

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

в силу уравнений Коши-Римана тождественно удовлетворяются. При этом, очевидно, функция скорости также является аналитической.

Этих сведений о комплексных числах достаточно, можно перейти к кватернионам.

[3] Точнее, понятие аналитичности (голоморфности) предполагает **C**-дифференцируемость в некоторой окрестности точки *z*.