1.2. КВАТЕРНИОНЫ

В этом разделе для кватернионов будут использоваться классические обозначения, введенные Гамильтоном.

Определение

Кватернионное число, или просто кватернион (в декартовой форме) – это математический объект вида $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, где a, b, c, d - действительные числа, причем a есть множитель действительной единицы 1 (которая часто опускается в записи), величины $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ носят условное название мнимых кватернионных единиц; их квадраты равны действительной единице со знаком минус $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$.

Для четырёх кватернионных единиц определены следующие правила взаимного умножения

$$1\mathbf{i} = \mathbf{i}1 = \mathbf{i}, \quad 1\mathbf{j} = \mathbf{j}1 = \mathbf{j}, \quad 1\mathbf{k} = \mathbf{k}1 = \mathbf{k},$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}.$$

Видно, что умножение с участием действительной единицы коммутативно, умножение мнимых единиц – антикоммутативно. Таким образом, полная таблица умножения кватернионных единиц (вместе с $1^2 = 1$) постулируется в виде 16 равенств. Компактная форма записи этой таблицы дана в главе 2.

Множитель действительной единицы назывется скалярой частью кватерниона q

$$a = \operatorname{scal} q;$$

линейная комбинация с мнимыми единицами – векторной частью

$$\operatorname{vect} q = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

Все числа типа $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ составляют множество кватернионов $\mathbf{Q}$: $q \in \mathbf{Q}$.

Иногда кватернионы вводятся с использованием так называемой поцедуры удвоения системы комплексных чисел (например, [12], [18], [1]). Поэтому, в частности, вместе с другими системами чисел, следующими из процедуры удвоения, кватернионы называют гиперкомплексными числами.

Представления мнимых единиц

Подобно мнимой единице из алгебры комплексных чисел, мнимые единицы алгебры кватернионов допускают представление в алгебре 2×2-матриц, где роль действительной единицы играет является единичная диагональная матрица *E*. Если из двух матриц с произвольными компонентами *a, b, c, d, e, f* и со следом, равным нулю,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}$$

построить «мнимые единицы»

$$\mathbf{i} = \frac{A}{\sqrt{detA}} \;\Rightarrow\; \mathbf{i}^2 = -E, \qquad \mathbf{j} = \frac{B}{\sqrt{detB}} \;\Rightarrow\; \mathbf{j}^2 = -E,$$

то и произведение последних

$$\mathbf{ij} = \frac{AB}{\sqrt{detA \det B}} = \frac{1}{\sqrt{det(AB)}} \begin{pmatrix} ad + bf & ae - bd \\ cd - af & ec + ad \end{pmatrix}$$

есть «мнимая единица», но при условии, что след матрицы-произведения тоже равен нулю

$$2ad + bf + ec = 0\,.$$

Если обозначить $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, то нетрудно проверить, что полученные таким образом матрицы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ вместе с единицей E удовлетворяют таблице умножения кватернионных единиц. Простой пример такой триады – матрицы, пропорциональные (с множителем $-i$) известным матрицам Паули

$$\mathbf{i} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно предложить и другие представления кватернионных единиц. В частности, замена в последних выражениях мнимой единицы матрицей

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

приводит к представлению кватернионных мнимых единиц 4×4-матрицами со всеми действительными компонентами.

Для изучения свойств кватернионов вид конкретного представления не нужен, однако, например, при определении действий над кватернионами обычно считается, что все они построены на одной системе кватернионных единиц, т.е. для всех вовлечённых в рассмотрение чисел подразумевается одно представление единиц; если оно изменяется, то сразу для всех чисел.

Сравнение, сложение и умножение кватернионов

Как и для комплексных чисел, сравнение кватернионов сводится лишь к определению их равенства. Кватернион $q_1 = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ равен кватерниону $q_2 = e + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$, если соответственно равны коэффициенты при каждой из единиц

$$q_1 = q_2 \;\Leftrightarrow\; \qquad a = e,\;\; b = f,\;\; \mathrm{c} = \mathrm{g},\;\; \mathrm{d} = \mathrm{h}\,.$$

Сложение (вычитание) кватернионов осуществляется покомпонентно: соответственно складываются (вычитаются) коэффициенты при каждой единице

$$q_1 \pm q_2 = a \pm e + (b \pm f)\mathbf{i} + (c \pm g)\mathbf{j} + (d \pm h)\mathbf{k}\,.$$

Операция сложения, очевидно, перестановочна.

Умножаются кватернионы как многочлены, но с использованием приведённой выше таблицы умножения для кватернионных единиц

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})\;(e + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}) = ae - bf - cg - dh + \\ &+ (af + be)\mathbf{i} + (ag + ec)\mathbf{j} + \;(ah + ed)\mathbf{k} + (bg - fc)\mathbf{ij} + (ch - gd)\,\mathbf{jk} + (df - hb)\mathbf{ki} = \\ &= ae - bf - cg - dh + (af + be + ch - gd)\mathbf{i} + (ag + ec + df - hb)\,\mathbf{j} + \;(ah + ed + bg - fc)\mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

Умножение, очевидно, некоммутативно:

$$q_1 q_2 \neq q_2 q_1,$$

поэтому при работе с кватернионами приходится говорить о правом и левом умножении. Однако, несложно проверить, что в произведении нескольких сомножителей скобки можно расставить произвольным образом

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)\,,$$

т.е. умножение кватернионов (как действительных и комплексных чисел) ассоциативно. Можно показать, что для сложения и умножения кватернионов выполняется закон дистрибутивности (и для правого, и для левого умножения)

$$q_1(q_2 + q_3) = q_1 q_2 + q_1 q_3 ; \qquad (q_2 + q_3)q_1 = q_2 q_1 + q_3 q_1 .$$

Операция сопряжения кватернионов

Как и для комплексных чисел, для кватернионов вводится операции сопряжения.

Всякому кватерниону $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ можно поставить в соответствие сопряжённый ему кватернион

$$\bar{q} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k} .$$

С помощью операции сопряжения можно выделить скалярную и векторную части кватерниона

$$scal\, q = \frac{q + \bar{q}}{2}, \qquad vect\, q = \frac{q - \bar{q}}{2} .$$

Для сопряжённых кватернионов справедливы следующие равенства

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 , \qquad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1 .$$

Существеннен обратный порядок сомножителей в последнем равенстве; в частности, благодаря ему алгебра кватернионов приводит к «тождеству четырёх квадратов».

Произведение кватерниона на ему сопряжённый есть действительное число; арифметический квадратный корень из этого числа называют модулем кватерниона

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} .$$

Квадрат модуля кватерниона носит название нормы

$$q\bar{q} = |q|^2 ;$$

отсюда можно получить выражение для кватерниона, обратного исходному

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} .$$

Если q представляет собой произведение сомножителей q_1 и q_2, то из определения нормы следует

$$|q|^2 = |q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)\overline{(q_1 q_2)} = q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1 = q_1 \bar{q}_1 q_2 \bar{q}_2 = |q_1|^2 |q_2|^2 ,$$

т.е. модуль произведения кватернионов равен произведению модулей сомножителей. В развернутом виде – это известное кватернионное «тождество четырёх квадратов». Если

$$q_1 = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} , \; q_2 = e + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k} ,$$

то

$$(ae - bf - cg - dh)^2 + (af + be + ch - gd)^2 + (ag + ec + df - hb)^2 + (ah + ed + bg - fc)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,(e^2 + f^2 + g^2 + h^2) .$$

Читается, как и в случае комплексных чисел, справа налево: произведение суммы четырёх квадратов на сумму четырёх квадратов есть снова сумма четырёх квадратов; или: норма произведения равна произведению норм.

Деление кватернионов

Поскольку умножение кватернионов некоммутативно, частное y от деления q_1 на $q_2 \neq 0$ можно представить как решение уравнений с левым $q_1 = y_l q_2$ и правым $q_1 = q_2 y_r$ умножением. Тогда левое частное принимает вид

$$y_l = \frac{q_1 \bar{q}_2}{q_2 \bar{q}_2} = \frac{q_1 \bar{q}_2}{|q_2|^2},$$

правое частное –

$$y_r = \frac{\bar{q}_2 q_1}{q_2 \bar{q}_2} = \frac{\bar{q}_2 q_1}{|q_2|^2}.$$

Каждое частное определяется однозначно и являтся кватернионом. Запись этих частных в развёрнутой форме для $q_1 = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ и $q_2 = e + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ осуществляется очевидным образом.

Алгебра кватернионов

Множество кватернионов обладает всеми свойствами алгебры размерности 4 (по числу базисных единиц), в нем заданы операции умножения на действительное число, сложения и умножения кватернионов.

Во многом эта алгебра близка алгебрам действтельных и комплексных чисел. Она ассоциативна по сложению и умножению, дистрибутивна, имеет единицу (действительная единица); в ней определены вычитание и деление; это алгебра нормированная, в ней выполняется тождество четырех квадратов.

Но алгебра кватернионов уже сильно отличается от алгебр меньших размерностей. Она некоммутативна по умножению и в силу этого, несмотря на «высокое качество» свойств, множество всех кватернионов является не полем, а телом – некоммутативным кольцом с делением (иногда можно встретить название «некоммутативное поле»).

Одна из важнейших отличительных черт алгебры кватернионов состоит в том, что она является последней по числу размерностей ассоциативной алгеброй с единицей и с делением. В 1878 году немецкий математик Г.Фробениус доказал замечательную теорему:

«Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов».

В следующей по размерности алгебре гиперкомплексных чисел – октав, содержащей 8 единиц, ассоциативность умножения уже теряется и заменяется ее ослабленным аналогом – так называемой альтернативностью. Однако и алгебра октав является нормируемой: в ней существует тождество суммы квадратов (восьми). Интересно, что именно поиск такого тождества привел английского математика А.Кэли к открытию алгебры октав. И оказалось, что алгебр более высоких размерностей, допускающих тождество суммы квадратов, больше нет. Это было доказано в 1898 году немецким математиком А.Гурвицем в его знаменитой теореме:

«Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов или октав».

Подробное доказательство теорем Фробениуса и Гурвица приведено, например, в [12].

Последние четыре алгебры носят название исключительных. Их размерность можно определить показательным рядом с основанием 2

алгебра	размерность алгебры $n = 2^p$	показатель степени p
действительные числа	$1 = 2^0$	0
комплексные числа	$2 = 2^1$	1
кватернионы	$4 = 2^2$	2
октавы	$8 = 2^3$	3

Можно упомянуть еще одно формальное обстоятельство. Алгебра кватернионов может рассматриваться как частный случай более общей математической конструкции – алгебры Клифферда. Последняя строится на натуральном числе образующих единиц, полусумма попарных произведений которых есть единичная матрица порядка размерности алгебры. С этой точки зрения алгебра кватернионов есть алгебра Клиффорда размерности 2. В качестве образующих при этом берутся две любые мнимые единицы; остальные единицы определяются как все независимые произведения образующих. (см., например, [11], [1], [37]).

В литературе алгебра кватернионов обозначается H или H_R (подчеркивается вещественность коэффициентов при кватернионных единицах), иногда Q. В данной работе будет использоваться последнее обозначение.

Геометрические представления кватернионов

Удовлетворительный геометрический образ всего множества кватернионов пока не найден. Число размерностей кватернионной алгебры (4) и выделенность одной из этих размерностей, казалось бы, провоцируют интерпретировать коэффициенты при кватернионных единицах как координаты точек физического пространственно-временного континуума. Однако такое прямолинейное решение было бы поспешным, и связь (как в представлении комплексных чисел) каждой из единиц кватернионной алгебры с направлением некоторой декартовой оси оказывается не слишком продуктивной.

Собственно говоря, значительная часть изложенного в этой книге материала будет в той или иной степени посвящена геометрическому толкованию кватернионных величин.

Наиболее просто геометрическое представление чисто векторных кватернионов. Достаточно заметить, что произведение двух векторных кватернионов $\mathbf{p} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{q} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$

$$\mathbf{pq} = -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3x_3) + (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{k}$$

в скалярной части содержит выражение, похожее на скалярное произведение двух векторов в декартовых координатах, а в векторной части – выражение похожее на векторное произведение; напрашивается вывод: мнимые кватернионные единицы определяют направления правой декартовой системы координат, а коэффициенты при них суть компоненты вектора в этой системе координат. Именно эта инерпретация, данная векторным кватернионам еще У.Гамильтоном, использовалась Дж.Максвеллом для записи его уравнений электродинамики и дала толчок развитию векторной алгебры О.Хэвисайдом и Д.Гиббсом в ее некватернионном изложении.

Особый геометрический образ имеют кватернионы, содержащие скалярную и векторную части, но с модулем, равным единице. Такие нормированные кватернионы имеют вид

$$h \equiv \frac{q}{|q|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}(a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}) \ .$$

Векторная часть h может быть представлена как

$$\frac{b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}}{|q|} = \frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{|q|}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{uu} = -1 \ .$$

Если обозначить $\frac{a}{|q|} = \cos\alpha$, $\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{|q|} = \sin\alpha$, то нормированный кватернион h принимает простой вид $h = \cos\alpha + \mathbf{u}\sin\alpha$. В отличие от аналогичного представления комплексного числа, здесь «мнимая единица» $\mathbf{u}$ имеет смысл трехмерного вектора «длиной» *i*. Пусть некоторый векторный кватернион $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = |a|\mathbf{v}$, $\mathbf{vv} = -1$, направлен ортогонально $\mathbf{u}$. Тогда скалярная часть произведения $\mathbf{uv}$ равна нулю $\vec{u}\vec{v} = 0$, или. $scal(\mathbf{uv}) = 0$, а векторная часть $\mathbf{uv}$ есть векторный кватернион $\mathbf{w}$, ортогональный $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, или $vect(\mathbf{np}) = \mathbf{w}$, $\mathbf{ww} = -1$. Теперь нетудно убедиться в том, что произведение нормированого кватерниона h слева на векторный кватернион $\mathbf{a}$

$$h\mathbf{a} = (\cos\alpha + \mathbf{u}\sin\alpha)|a|\mathbf{v} = |a|(\mathbf{v}\cos\alpha + \mathbf{w}\sin\alpha)$$

можно трактовать с геометрических позиций как поворот вектора $\vec{a}$ на положительный угол α (против часовой стрелки) вокруг оси с направлением $\mathbf{u}$. Таким образом, нормированному кватерниону в качестве геометрического образа можно поставить в соответствие дугу окружности (или дугу большого круга сферы); характеристики такой дуги суть соответствующий ей угол и направление единичного вектора, нормального к плоскости окружности.

Очевидно, что аналогичное умножение ненормированного кватерниона на пространственно ортогональный векторный кватернион приведет к повороту исходного вектора и изменению его длины в число раз, равное модулю левого сомножителя.

Используя эти сведения, можно показать, что произведение типа qpq^{-1}, где q, p – произвольные нескалярные (т.е. с векторной частью) кватернионы, есть кватернион, модуль и скалярная часть которого равны модулю и скалярной части p. Векторная часть qpq^{-1} получается вращением $vect(p)$ по конусу вокруг оси $vect(q)$ на двойной угол, характеризующий q. Подобные преобразования вращения и представление кватернионов на сфере находят применение для сравнительно простого вывода соотношений сферической геометрии, описания конечных поворотов и решения кинематических задач ориентации твердого тела (см., например [18]).

Легко заметить, что главную роль в ассоциации кватерниона с дугой окружности и пространственным поворотом играют мнимые единицы. В самом деле, если в качестве нормированного кватерниона фигурирует действительная единица, то $\alpha = 0$, длина дуги также есть ноль, направление не определено, и при умножении на действительную единицу никакого поворота векторного кватернона не последует. Наоборот, мнимой единице, например, $\mathbf{k}$, которая тоже является нормированным и пространственно направленным кватернионом, соответствут дуга длиной в одну четвертую часть длины окружности: единица $\mathbf{k}$ «вращает» ортогональный ей векторный кватернион, например, единицу $\mathbf{i}$, на угол $\frac{\pi}{2}$ и «превращает» ее в $\mathbf{j}$: $\mathbf{j} = \mathbf{ki}$.

Иными словами, любая из трех кватернионых мнимых единиц есть результат векторного умножения двух остальных и, следовательно, имеет свойства аксиального пространственного вектора. Декартова система с такими направляющими векторами математически отличается от системы координат, снабженной «обычными» (полярными) направляющими векторами подобно тому как различны физические координатные системы, построенные на трех ортогонально ориентированных гироскопах и системы, построенные на трех взаимно перпендикулярных линейках. Так, пожалуй, можно подчеркнуть различие между кватернионным (некоммутативным) описанием векторов и «традиционной» коммутативной по умножению векторной алгеброй.