ГЛАВА 2. КВАТЕРНИОННЫЙ БАЗИС

В этой главе рассматривается компактная формулировка правила умножения кватернионов, определяются условия его форм-инвариантности при допустимых преобразованиях кватернионных единиц, дается определение трехмерного кватернионного базиса и исследуются некоторые его алгебраические и геометрические свойства.

2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАТЕРНИОННЫХ ЕДИНИЦ[4]

Тензорная форма таблицы умножения кватернионов

Запись кватернионных единиц в традиционной гамильтоновой форме, как видно из предыдущего раздела, громоздка и не слишком удобна для изучения свойств кватернионного умножения. Более компактная форма достигается применением индексов и величин, используемых в дифференциальной геометрии.

Поскольку действительная единица кватернионной алгебры выделена алгебраически и геометрически, ее предлагается выделить и в обозначениях: она по-прежнему будет обозначаться как 1 (в формулах этот символ будет, как правило, опущен). Мнимые же единицы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ предлагается обозначить как $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Пусть строчные латинские индексы изменяются от одного до трех: $j, k, l, m, n ... = 1,2,3$, тогда весь набор мнимых единиц есть $\mathbf{q}_k$.

В дальнейшем, если не оговорено обратное, будет предполагаться, что повторение в одной формуле двух индексов одинакового наименования означает суммирование по этим индексам от 1 до 3 (правило суммирования Эйнштейна), например,

$$a_j \mathbf{q}_j \equiv \sum_{j=1}^{3} a_j \mathbf{q}_j = a_1 \mathbf{q}_1 + a_2 \mathbf{q}_2 + a_3 \mathbf{q}_3 .$$

Ниже также будут использованы известные математические символы: трехмерный символ Кронекера δ_{kl}, симметричный относительно перестановки индексов:

$$\delta_{kl} \equiv \begin{cases} 1; & k = l \\ 0; & k \neq l \end{cases}, \qquad \delta_{kl} = \delta_{lk}$$

и трехмерный символ Леви-Чивиты ε_{jkl}, антисимметричный по всем индексам:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} \equiv 1, \ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{231} \equiv -1,$$

$\varepsilon_{jkl} \equiv 0$, если любые два (или все три) индекса одинаковы,

$$\varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{kjl} = \varepsilon_{klj} = -\varepsilon_{lkj} = \varepsilon_{ljk} = -\varepsilon_{jlk} .$$

Из последнего определения видно, что всякая циклическая подстановка индексов (не меняющая их исходный порядок) не изменяет знака ε_{jkl}.

В трехмерном плоском пространстве оба символа являются тензорами. Символ Кронекера носит название метрического тензора, символ Леви-Чивиты иногда называют дискриминатным тензором.

Теперь таблицу умножения кватернионов можно записать в компактной форме.

$$1\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k , \tag{2-1}$$

$$\mathbf{q}_k \mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj} \mathbf{q}_j , \tag{2-2}$$

[4] Исследования, солержащееся в этом параграфе, опубликованы в работах [100], [101].

Видно, что умножение на действительную единицу коммутативно. Оно очевидно отличается от умножения мнимых единиц, произведение которых содержит два слагаемых: симметричную по индексам действительную (скалярную) часть и антисимметричную мнимую (векторную) часть. Понятно, что анализ соотношений (2-1) и (2-2), которые являются ключевыми в данной работе, позволяет в рафинированном виде исследовать свойства умножения любых элементов алгебры кватернионов.

Форм-инвариантность правила умножения

Выше отмечалось, что кватернионные единицы могут быть заданы многими способами даже в рамках одного представления. Возникает вопрос: какова связь между всеми такими способами, или иными словами, какие преобразования единиц не изменяют форму правила кватернионного умножения (2-1), (2-2)?

Можно заметить, что вне зависимости от представления единиц возможны, по крайней мере, два типа преобразований: одно «коллективное», видоизменяющее единым образом все единицы, другое – «индивидуальное», специфичное для каждой из единиц.

<u>Спинорные преобразования</u>

Сначала о «коллективном» преобразовании. Пусть U есть операция, изменяющая сразу все кватернионные единицы. Пусть при этом U есть ненулевой элемент некоторого множества G с единицей (тождественной операцией E), так что существует U^{-1}

$$UU^{-1} = U^{-1}U = E\,.$$

Поскольку U^{-1} также есть элемент G, последнее соотношение предполагает заданность умножения в G, так что это множество является группой. Тогда можно определить трансформационный закон

$$\mathbf{q}_{k'} = U\mathbf{q}_k U^{-1}\,,\ 1' = U1U^{-1} = E\cdot 1 = 1\,, \tag{2-3}$$

оставляющий правило умножения (2-1), (2-2) форм-инвариантным

$$1'\mathbf{q}_{k'} = 1\cdot U\mathbf{q}_k U^{-1} = U1\mathbf{q}_k U^{-1} = U\mathbf{q}_k U^{-1} = \mathbf{q}_{k'}\,,$$

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_{l'} = U\mathbf{q}_k U^{-1}U\mathbf{q}_l U^{-1} = U\mathbf{q}_k\mathbf{q}_l U^{-1} = -U\delta_{kl}U^{-1} + \varepsilon_{klj}U\mathbf{q}_j U^{-1} = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj}\mathbf{q}_{j'}\,.$$

Последние формулы требуют двух небольших уточнений. Во-первых, не показанная инвариантность умножения мнимой единицы на действительную (в обратном порядке) показывается тривиально. Во-вторых, преобразование U действует только на кватернионные единицы, но не на тензоры, которые относительно группы G инвариантны; поэтому для простоты штрихи у индексов символов Кронекера и Леви-Чивиты, как правило опускаются.

Существенно заметить, что преобразование действительной единицы в (2-3) оказывается тождественным, по-настоящему изменяются только мимые единицы. И это вполне понятно: в матричном представлении действительная единица – диагональная единичная матрица – единственная для всех возможных представлений мнимых единиц.

Таким образом, преобразование типа (2-3) по сути является преобразованием лишь трехмерных векторных единиц и никак не затрагивает скалярную единицу.

Число параметров преобразования несложно подсчитать, если воспользоваться простейшим 2×2-матричным представлением $\mathbf{q}_k$. В этом случае и оператор U есть 2×2-матрица, очевидно, унимодулярная

$$\det U = 1$$

в силу независимости преобразования (2-3) от определителя U.

Таким образом, из четырех элементов U независимы лишь три. В общем случае это комплексные числа, так что всего параметров шесть; тогда множество операторов U составляют специальную линейную группу $SL(2,C)$. В частном случае, когда параметры группы – действительные числа, число параметров равно трем, и группа преобразований сужается до специальной унитарной группы $SU(2)$.

Группы $SL(2,C)$ и $SU(2)$ называют спинорными группами; поэтому преобразования типа (2-3) также будут называться спинорными преобразованиями.

Преобразование, обратное (2-3), очевидно есть:

$$\mathbf{q}_k = U^{-1}\mathbf{q}_{k'}U .$$

В 2×2-матричном представлении весьма просто установить, что преобразование (2-3), по сути, представляет собой умножение кватернионных единиц на нормированные кватернионы. Действительно, любая матрица $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, с единичным детерминантом $ad - bc = 1$, $U \in SL(2,C)$, может быть представлена в виде

$$U = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} + \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{a+d}{2} - \frac{a-d}{2} \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix},$$

или

$$U = \frac{a+d}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}\,\mathbf{q} ,$$

где кватернион

$$\mathbf{q} = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет всем свойствам кватернионной мнимой единицы.

Итак, матрица U представляет собой кватернион, очевидно, унимодулярный. Значит, согласно упомянутой ранее геометрической интерпретации, преобразование (2-3) есть некоторый поворот сразу всех единичных векторов $\mathbf{q}_k$, задающих направления правой декартовой системы координат в трехмерном пространстве. После поворота свойства ортонормированности и единичности векторов сохраняются, что, собственно, и выражает форм-инвариантность правила умножения кватернионных единиц.

В качестве параметров вращения при спинорном преобразовании можно использовать элементы матрицы U (параметры Кэли-Клейна) или компоненты построенного из нее единичного кватерниона (параметры Родрига-Гамильтона) (см., например, [18]). Возможен и иной выбор параметров.

Простой пример. Пусть на кватернионные единицы

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2-4}$$

действуют матрицы

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\mathbf{q}_3, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} = \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\mathbf{q}_3; \tag{2-5}$$

половинный угол – параметр данного спинорного преобразования – взят для удобства.

Преобразованные единицы имеют вид

$$\mathbf{q}_{1'} = -i\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_{2'} = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\alpha} \\ ie^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_{3'} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2-6}$$

то есть последняя единица не изменяется, а первая и вторая становятся исходными при $\alpha \to 0$. Как отмечалось выше, геометрически такое преобразование означает поворот векторов $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ на положительный (против часовой стрелки) угол α вокруг $\mathbf{q}_3$.

Эта трактовка предстает в более очевидной форме при изучении преобразований второго типа.

<u>Векторные преобразования</u>

Второй тип преобразований может быть задан уравнением

$$\mathbf{q}_{k'} = O_{k'l}\mathbf{q}_l \ , \tag{2-7}$$

в котором оператор $O_{k'l}$, преобразующий каждую единицу $\mathbf{q}_k$ специальным образом, представляет собой некоторую 3×3-матрицу (номера строк k' и столбцов l принимают как обычно значения от 1 до 3).

Свойства $O_{k'l}$ следуют из требования форм-инвариантности правила умножения (2-2). С одной стороны

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_{j'} = O_{k'l}O_{j'm}\mathbf{q}_l\mathbf{q}_m = O_{k'l}O_{j'm}(-\delta_{lm} + \varepsilon_{lmn}\mathbf{q}_n) = -O_{k'l}O_{j'l} + O_{k'l}O_{j'm}\varepsilon_{lmn}\mathbf{q}_n ,$$

но с другой стороны

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_{j'} = -\delta_{kj} + \varepsilon_{kjm}\mathbf{q}_{m'} = -\delta_{kj} + \varepsilon_{kjm}O_{m'n}\mathbf{q}_n .$$

В этих равенствах скалярные и векторные части соответственно равны, так что

$$O_{k'l}O_{j'l} = \delta_{kj} \tag{2-8}$$

и

$$O_{k'l}O_{j'm}\varepsilon_{lmn} = O_{m'n}\varepsilon_{kjm} . \tag{2-9}$$

Нетрудно показать, что эти условия не противоречат друг другу. Для этого достаточно выразить элемент матрицы O в явном виде, умножив, например, обе части (2-9) на символ Леви-Чивиты ε_{kjp} с суммированием по индексам k и j

$$O_{p'n} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kjp}\varepsilon_{lmn}O_{k'l}O_{j'm} . \tag{2-10}$$

Выражение (2-10) есть, по существу, определение так называмой присоединеной матрицы: каждый элемент такой матрицы совпадает с его же алгебраическим дополненим (правая часть последнего равенства). Домножение (2-10) на $O_{s'n}$ дает

$$O_{p'n}O_{s'n} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kjp}\varepsilon_{lmn}O_{k'l}O_{j'm}O_{s'n} = \delta_{ps}\det O\,, \qquad (2\text{-}11)$$

откуда следует $(\det O)^2 = (\det O)^3$, или $\det O = 1$. Таким образом, равенство (2-11), а значит, и (2-9) эквивалентно (2-8), что и требовалось показать.

Из преобразования (2-7) и ему обратного

$$O^{-1}_{nk'}\mathbf{q}_{k'} = O^{-1}_{nk'}O_{k'l}\mathbf{q}_l = \mathbf{q}_n$$

следует выражение для обратной матрицы

$$O^{-1}_{nk'} = O_{k'n}\,, \qquad (2\text{-}12)$$

представляющее собой условие ортогональности: обратная матрица равна транспонированной. В силу (2-12), очевидно

$$O_{k'n}O_{k'l} = \delta_{nl}\,.$$

Так же, как операторы спинорного преобразования (2-3), матрицы преобразования (2-7) образуют группу, единицей в которой является символ Кронкера. Поскольку подчиненные условиям (2-8) [или (2-9)] 3×3-матрицы являются специальными (S: $\det O = 1$) и ортогональными (*O*), все их множество составляет группу $SO(3)$. Преобразование этой группы реализует некоторый обобщенный поворот векторных кватернионных единиц.

Число параметров группы, равное числу независимых компонент матрицы *O*, можно определить, например, как разность общего числа компонент (девять) и числа независимых условий в уравнении (2-8). Это уравнение симметрично по трехмерным индексам, следовательно, содержит $\frac{3(3+1)}{2} = 6$ условий, так что независимыми остаются только три компоненты матрицы.

В общем случае параметры могут быть комплексными числами. Тогда $O \in SO(3, C)$. Если же параметры – действительные числа, то $O \in SO(3, R)$. В последнем случае для обозначения матриц преобразования чаще будет использоваться символ *R*.

Связь матриц спинорного и векторного преобразований

Полезно установить формулы взимосвязи между матричными представлениями групп инвариантности $SL(2C)$ и $SO(3)$.

Домножение преобразованной различными способами векторной единицы

$$\mathbf{q}_{k'} = U\mathbf{q}_k U^{-1} = O_{k'j}\mathbf{q}_j$$

на исходную единицу $\mathbf{q}_n$ приводит к матричному выражению

$$\mathbf{q}_{k'}\mathbf{q}_n = U\mathbf{q}_k U^{-1}\mathbf{q}_n = O_{k'j}\mathbf{q}_j\mathbf{q}_n = O_{k'j}(-\delta_{jn} + \varepsilon_{jkm}\mathbf{q}_m) = -O_{k'n} + O_{k'n}\varepsilon_{jkm}\mathbf{q}_m\,, \qquad (2\text{-}13)$$

след которого определяет матрицу векторного преобразования как функцию спинорного

$$O_{k'n} = -\frac{1}{2}Sp(U\mathbf{q}_k U^{-1}\mathbf{q}_n) \qquad (2\text{-}14)$$

(стоит напомнить, что скалярная часть кватерниона имеет множителем действительную единицу, в данном случае $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, так что $Sp(1) = 2$; след же векторной части всегда равен нулю).

Обратное выражение – 2×2-матрицы спинорного преобразования через 3×3-матрицу векторного преобразования также можно получить из равенства (2-13). Для этого спинорная матрица в кватернионной форме с разложением по единицам исходного представления $U = s + v_k \mathbf{q}_k$, так что $U^{-1} = s - v_k \mathbf{q}_k$ и $s^2 + v_k v_k = 1$ (в силу унимодулярности U), подставлятся в выражение (2-13), свернутое по индексам *k'* и *n*

$$O_{k'n}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n = (s + v_j\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_k(s - v_m\mathbf{q}_m)\mathbf{q}_k .$$

С использованием тождеств $\varepsilon_{kjp}\varepsilon_{mnp} = \delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{kn}\delta_{jm}$, $\varepsilon_{kjp}\varepsilon_{mjp} = 2\delta_{km}$ правая часть последнего равенства приводится к стандартной кватернионной форме

$$O_{k'n}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n = 1 - 4s^2 - 4s\,v_k\mathbf{q}_k = 1 - 4sU , \qquad (2\text{-}15)$$

откуда

$$U = \frac{1}{4s}(1 - O_{k'n}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n) . \qquad (2\text{-}16)$$

Скаляр *s* определяется из (2-14) и (2-15)

$$O_{k'k} = -\frac{1}{2}Sp(U\mathbf{q}_k U\mathbf{q}_k) = -\frac{1}{2}Sp(1 - 4s^2 - 4sv_k\mathbf{q}_k) = -1 + 4s^2 ,$$

или

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{1 + O_{k'k}} .$$

Из последнего равенства и (2-16) следует окончательный вид матрицы спинорного преобразования как функции векторного

$$U = \frac{1 - O_{k'n}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n}{2\sqrt{1 + O_{m'm}}} ,$$

или в стандартной кватернионной форме

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{1 + O_{m'm}} - \frac{O_{k'n}}{2\sqrt{1 + O_{m'm}}}\varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j . \qquad (2\text{-}17)$$

Обратной должна быть матрица

$$U^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + O_{r'r}} + \frac{O_{l'm}}{2\sqrt{1 + O_{r'r}}}\varepsilon_{lmp}\mathbf{q}_{p'} . \qquad (2\text{-}18)$$

Несложно показать, что это действительно так:

$$UU^{-1} = \frac{1}{4}(1 + O_{r'r}) + \frac{1}{4(1 + O_{r'r})}O_{k'n}O_{j'm}\varepsilon_{knj}\varepsilon_{lmj} ,$$

второе слагаемое правой части преобразуется к виду

$$\frac{1}{4(1 + O_{r'r})}(O_{k'n}O_{k'n} - O_{k'n}O_{n'k}) = \frac{1}{4(1 + O_{r'r})}(3 - O_{k'k}{}^2 + 2O_{k'k})$$

[тождество $O_{k'n}O_{n'k} = O_{k'k}{}^2 - 2O_{k'k}$ сразу следует из равенства (2-10)], так что матрица (2-18) действительно есть обратная *U*:

$$UU^{-1} = \frac{1}{4(1+O_{r'r})}[(1+O_{k'k})^2 + 3 - O_{k'k}{}^2 + 2O_{k'k}] = 1.$$

Похожая процедура вывода взаимозависимости матриц, представляющих преобразования $SU(2)$ и $SO(3,R)$ приведена в работе [38].

Некоторые алгебраические свойства матрицы векторного преобразования

Ниже в этой работе существенную роль будут играть именно векторные преобразования кватернионов. Поэтому целесообразно более подробно рассмотреть свойства матриц векторного преобразования. Для таких матриц можно предложить много различных вариантов общего вида, где автоматически учитывалась бы их принадлежность к группе специальных и ортогональных. Один из таких вариантов следующий

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2-z^2} & -\dfrac{x\sqrt{1-y^2-z^2}+yz\sqrt{1-x^2-z^2}}{1-z^2} & \dfrac{xy-z\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ x & \dfrac{\sqrt{1-x^2-z^2}\sqrt{1-y^2-z^2}-xyz}{1-z^2} & \dfrac{-y\sqrt{1-x^2-z^2}-xz\sqrt{1-y^2-z^2}}{1-z^2} \\ z & y & \sqrt{1-y^2-z^2} \end{pmatrix}. \qquad (2\text{-}19)$$

Сумма квадратов элементов каждой строки или столбца этой матрицы есть единица; каждый элемент равен собственному алгебраическому дополнению; определитель равен единице (все эти свойства связаны друг с другом). Независимыми могут считаться элементы x, y и z, которые в общем случае являются комплексными величинами, т.е. всего независимых параметров 6.

Как отмечалось выше, матрица O осуществляет обобщенный поворот векторных единиц $\mathbf{q}_k$. Такую трактовку векторного преобразования можно проиллюстрировать фактом наличия у матрицы O собственного вектора X с собственным значением, равным единице:

$$O_{k'j}X_j = \delta_{kj}X_j. \qquad (2\text{-}20)$$

Это уравнение показывает, что действие матрицы О на вектор X не изменяет его, т.е. X задает направление оси обобщенного поворота. Существование такого вектора – решения уравнения (2-20) – определяется равенством нулю характеристического детерминанта

$$\det(O_{k'j} - \delta_{kj}) = 0,$$

что удостоверяется для матрицы (2-19) прямым вычислением.

Как видно, структура матрицы (2-19) достаточно сложна. Однако легко проверить, что она допускает представление в виде произведения трех весьма простых сходных по структуре матриц

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & -\dfrac{x}{\sqrt{1-z^2}} & 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\dfrac{1-x^2-z^2}{1-z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & \sqrt{1-z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{1-z^2}} \\ 0 & \dfrac{y}{\sqrt{1-z^2}} & \sqrt{\dfrac{1-y^2-z^2}{1-z^2}} \end{pmatrix}. \qquad (2\text{-}21)$$

Это произведение естественно обозначить так

$$O = O_3 O_2 O_1 .$$

Сразу видно, что каждая из матриц-сомножителей имеет собственный вектор с единичным собственным значением

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

направления этих векторов суть направления векторных кватернионных единиц с соответствующим номером. Таким образом, каждая матрица O_K осуществляет такой обобщенный поворот векторных единиц, что одна из них оказывается незатронутой (поворот в плоскости двух других единиц). Такой поворот иногда будет называться простым поворотом (вращением); в литературе встречается термин «плоское вращение».

Очевидный смысл простое вращение приобретает в преобразовании с действительными параметрами.

2.2. КВАТЕРНИОННЫЙ БАЗИС[5]

Кватернионный базис и его действительные вращения

Как отмечалось выше, векторные кватернионные единицы имеют своим геометрическим образом правую тройку векторов, нормированных на единицу и взаимно перпендикулярных. Наиболее соблазнительно поэтому считать эти векторы направляющими векторами декартовой системы координат в трехмерном пространстве. Тогда преобразования (2-3), (2-7), оставляющие неизменными длины векторов и углы между ними, сводятся к обычным поворотам на действительные углы.[6]

Все триады $\mathbf{q}_k$, подчиненные правилу умножения (2-1), (2-2), трактуемые как направляющие векторы декартовой системы координат и трансформируемые матрицами допустимых групп с действительными параметрами, в дальнейшем будут называться кватернионным базисом трехмерного пространства (или, короче, Q-базисом).

Пусть независимые параметры матрицы (2-19) действительные $(O \to R)$; после их переобозначения

$$x = -\sin\alpha\cos\beta\,, \quad y = -\sin\gamma\cos\beta\,, \quad z = \sin\beta\,,$$

матрицы простых вращений приобретают вид

$$R_1^{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \; R_2^{\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, \; R_3^{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2\text{-}22)$$

нижний индикатор указывает номер не затронутого вращением вектора Q-базиса, верхний индикатор – угол поворота вокруг этого вектора. Например, преобразование с помощью R_3^{α} простейшего Q-базиса (2-4) приводит в точности к Q-базису (2-6), повернутому относительно исходного на угол α вокруг $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{3'}$; с использованием формулы (2-17)

[5] Результаты исследованияй, приведенных в этом параграфе, опубликованы в работах [102], [103], [104].

[6] Такая интерпретация трехмерных кватернионных единиц не единственно воможна. Вариант трактовки с использованием комплексных параметров дан в главе 5 «Кватернионные релятивистские системы отсчета».

нетрудно также установить, что аналог «векторной» матрицы R_3^α есть спинорная матрица (2-5). Параметры матриц (2-22), реализующие последовательные повороты сначала вокруг первого вектора исходного Q-базиса, затем вокруг второго вектора один раз повернутого Q-базиса и, наконец, вокруг третьего вектора два раза повернутого Q-базиса, называют углами Крылова [18]. Матрица «суммы» таких поворотов, равная произведению трех матриц простых вращений, имеет вид

$$R = R_3^\alpha R_2^\beta R_1^\gamma = \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha & -\cos\gamma\sin\beta\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha \\ -\cos\beta\sin\alpha & -\sin\gamma\sin\beta\sin\alpha+\cos\gamma\cos\alpha & \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha \\ \sin\beta & -\sin\gamma\cos\beta & \cos\gamma\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Поскольку строки матрицы составлены коэффициентами разложения векторов результирующего Q-базиса по векторам исходного, понятно, что диагональные члены суть косинусы углов между векторами этих Q-базисов, имеющими одинаковые номера, так что угол между $\mathbf{q}_{1'}$ и $\mathbf{q}_1$ есть

$$\varepsilon_1 = \arccos(\cos\beta\cos\alpha)\,,$$

угол между $\mathbf{q}_{2'}$ и $\mathbf{q}_2$

$$\varepsilon_2 = \arccos(\cos\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha)\,,$$

угол между $\mathbf{q}_{3'}$ и $\mathbf{q}_3$

$$\varepsilon_3 = \arccos(\cos\gamma\cos\beta)\,.$$

Таковы соотношения между углами результирующего поворота Q-базиса и углами последовательных поворотов (2-22).

Следует заметить, что выбор независиымых угловых параметров, конечно, не ограничивается углами Крылова. Такими параметрами могут быть углы Эйлера или три любых других простых поворота с обязательным чередованием двух последующих осей вращения.

Собственные функции векторных кватернионных единиц

С точки зрения дальнейшего изучения алгебраических свойств кватернионнного базиса, весьма примечателен тот факт, что единицы $\mathbf{q}_k$ не являются наиболее фундаментальными (т.е. далее «не делимыми») математическими объектами, но имеют определенную внутреннюю структуру. Эта структура проявляется при решении задачи на собственные значения и собственные функции.

Пусть оператор $\mathbf{q}$ общего вида действует слева и справа на некоторые математические объекты соответственно ψ и φ, и в обобщенном смысле оставляет их неизменными:

$$\mathbf{q}\psi = \lambda\varphi\,, \qquad (2\text{-}23а)$$

$$\varphi\mathbf{q} = \mu\varphi\,, \qquad (2\text{-}23б)$$

где λ, μ – числа (комплексные). Уравнения (2-23) можно решить для простейших матричных представлений

$$\mathbf{q} = -\frac{i}{T}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \qquad \varphi = (u \;\; v)\,, \qquad \psi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

где $T = a^2 + bc \neq 0$; a, b, c, d, u, v, x, y – любые комплексные числа.

Из равенства нулю характеристических определителей уравнений (2-23) получаются собственные значения $\lambda = \mu = \pm i$, после чего с точностью до модуля определяются 2-векторы собственных функций.

При $T \neq a$

$$\varphi^{\pm} = u\begin{pmatrix} 1 & \mp \dfrac{b}{T \pm a} \end{pmatrix}, \qquad \psi^{\pm} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \mp \dfrac{c}{T \pm a} \end{pmatrix}.$$

При $T = a = 1$ (касается только функций с собственными значениями -*i*):
если $b = 0$, то

$$\varphi^{-} = u(1 \quad 0), \qquad \psi^{-} = x\begin{pmatrix} 1 \\ c/2 \end{pmatrix};$$

если $c = 0$, то

$$\varphi^{-} = u(1 \quad b/2), \quad \psi^{-} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уточнить оставшиеся величины x и u можно введением естественного здесь условия нормировки на единицу.

При $T \neq a$

$$\varphi^{\pm}\psi^{\pm} = xu\left(1 + \frac{bc}{(T \pm a)^2}\right) = 1, \tag{2-24а}$$

откуда

$$(xu)^{\pm} = \frac{2T}{T \pm a}.$$

При $T = a = 1$

$$\varphi^{-}\psi^{-} = xu = 1, \tag{2-24б}$$

и, если выбрать еще одну степень свободы, предположив
при $T \neq a$:

$$x^{\pm} = u^{\pm} = \sqrt{\frac{T \pm a}{2T}},$$

при $T = a = 1$:

$$x = u = 1,$$

то собственные функции определенно выражаются через компоненты матрицы-вектора $\mathbf{q}$:
при $T \neq a$

$$\varphi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2T}}\begin{pmatrix} \mp \dfrac{c}{\sqrt{T \pm a}} & \sqrt{T \pm a} \end{pmatrix}, \quad \psi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2T}}\begin{pmatrix} \mp \dfrac{b}{\sqrt{T \pm a}} \\ \sqrt{T \pm a} \end{pmatrix}, \tag{2-25а}$$

при $T = a = 1$, если $b = 0$, то

$$\varphi^{-} = (1 \quad 0), \qquad \psi^{-} = \begin{pmatrix} 1 \\ c/2 \end{pmatrix}; \tag{2-25б}$$

если $c = 0$, то

$$\varphi^{-} = (1 \quad b/2), \qquad \psi^{-} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2-25в}$$

При этом оказывается, что, если функции одной четности (т.е. имеющие собственным значением $+i$ или $-i$) согласно (2-24) нормированы на единицу, то левая и правая функции разной четности друг другу ортогональны:

$$\varphi^{\pm}\psi^{\mp} = 0\,. \tag{2-26}$$

Можно сказать, что аналогично оператору квантовой механики матрица-вектор $\mathbf{q}$ обладает полным набором ортогональных собственных функций для каждого из своих «точных значений» $\pm i$.

Более того, оказывается, что любая кватернионная «мнимая» единица $\mathbf{q}$ может быть сконструирована из любого набора ее собственных функций – четных или нечетных. Чтобы это показать, достаточно преобразовать, например, уравнение (2-23а), тензорно домножив его справа на функцию-строку той же четности, что и функция-столбец

$$\mathbf{q}\psi^{\pm}\varphi^{\pm} = \pm i\,\psi^{\pm}\varphi^{\pm}\,. \tag{2-27}$$

Тензорное произведение $\psi\varphi$ в данном случае есть 2×2-матрица *C*; для большей ясности ее можно записать с использованием двумерных индексов

$$C^{\pm}_{AB} = \psi^{\pm}_{A}\varphi^{\pm}_{B}\,, \tag{2-28а}$$

или в явном виде, с учетом формул (2-25):
при $T \neq a$

$$C^{\pm} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\pm}\varphi_1^{\pm} & \psi_1^{\pm}\varphi_2^{\pm} \\ \psi_2^{\pm}\varphi_1^{\pm} & \psi_2^{\pm}\varphi_2^{\pm} \end{pmatrix} = \frac{1}{2T}\begin{pmatrix} \dfrac{bc}{T\pm a} & \mp b \\ \mp c & T\pm a \end{pmatrix}, \tag{2-28б}$$

при $T = a = 1$, если $b = 0$, то

$$C^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2-28в}$$

если $c = 0$, то

$$C^{-} = \begin{pmatrix} 1 & b/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2-28г}$$

Как у всех матриц, элементы которых составлены из произведений компонент векторов, ее определитель исчезает

$$\det C = 0\,, \tag{2-29а}$$

а след – по условию нормировки (2-24) – единичен[7]

$$SpC = 1\,. \tag{2-29б}$$

Легко проверить, что в силу свойств (2-29) любая натуральная степень матрицы *C* равна самой матрице *C*

$$C^{n} = C\,, \tag{2-30}$$

такая матрица называется идемпотентной.

---

[7] Свойства (2-29) матрицы *C* как бы дополнительны к свойствам матрицы $\mathbf{q}$, у которой наоборот, $\det\mathbf{q} = 1$, $Sp\mathbf{q} = 0$.

Свойство (2-30) весьма полезно для выражения матрицы-вектора **q** через ее собственные функции. С использованием (2-30), уравнение (22-27) представимо в виде

$$\mathbf{q}C^{\pm} = \pm iC^{\pm} = \pm i(2C^{\pm} - 1)C^{\pm},$$

откуда сразу следует

$$\mathbf{q} = \pm i(2C^{\pm} - 1) = \pm i(2\psi^{\pm}\varphi^{\pm} - 1)\,. \tag{2-31}$$

Обратно:

$$C^{\pm} = \psi^{\pm}\varphi^{\pm} = \frac{1 \mp i\mathbf{q}}{2}\,. \tag{2-32}$$

Понятно, что всякое представление векторных кватернионных единиц $\mathbf{q}_k$ имеет три пары собственных функций $\varphi^{\pm}_{(k)}$ и $\psi^{\pm}_{(k)}$; индексы в скобках указывают на принадлежность функции вектору с тем же номером; как правило, по таким повторяющимся индексам суммирование не подразумевается.

Из формулы (2-31), а также из трансформационного закона векторных единиц (2-3) в явной форме следует спинорное преобразование (и, следовательно, спинорный характер) собственных функций

$$\mathbf{q}_{k'} = U\mathbf{q}_k U^{-1} = \pm i(2U\psi_{(k)}\varphi_{(k)}U^{-1} - 1) = \pm i(2\psi_{(k')}\varphi_{(k')} - 1)\,,$$

где

$$\psi_{(k')} = U\psi_{(k)}\,, \qquad \varphi_{(k')} = \varphi_{(k)}U^{-1}\,, \tag{2-33}$$

индикаторы четности опущены и нет суммирования по *k*.

Таким образом, есть основание считать собственные функции φ и ψ более элементарными (или фундаментальными) математическими объектами, чем кватернионная векторная единица: последняя из них строится. И если приписывать единицам $\mathbf{q}_k$ геометрический смысл направлений, очевидно связанных с числом измерений трехмерного пространства, то составные части $\mathbf{q}_k$ – собственные функции φ и ψ - могут трактоваться как своеобразный «корень квадратный» из вектора направления пространственной размерности. Иначе говоря, пространство обладает более тонкой внутренней структурой, нежели «грубая» наблюдаемая трехмерность.

Примеры собственных функций

Итак, каждому представлению трехмерных кватернионных единиц соответствуют три пары собственных функций (далее чаще будет использоваться аббревиатура СФ). Можно рассмотреть некоторые примеры.

Для простейшей триады (2-4)

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2-34а}$$

из формул (2-25) следует

$$\varphi^{\pm}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp 1 \quad 1)\,, \quad \psi^{\pm}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mp 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{2-34б}$$

$$\varphi^{\pm}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i \quad 1), \quad \psi^{\pm}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{2-34в}$$

$$\varphi^{+}_{(3)} = (0 \quad 1), \quad \psi^{+}_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi^{-}_{(3)} = (1 \quad 0), \quad \psi^{-}_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{2-34г}$$

поскольку для вектора $\mathbf{q}_3$ $T = a = 1$, его «нечетные» СФ (2-34г) получены отдельно по формулам (2-25б). В данном случае все «функции» являются числами. Элементарно проверяется, что векторы $\mathbf{q}_k$ строятся из любой пары (четной или нечетной) соответствующих им «функций» (2-34) согласно формуле (2-31). Видно также, что левые и правые СФ (2-34) получаются друг из друга эрмитовым сопряжением (транспонирование плюс комплексное сопряжение)

$$\varphi = \psi^{+} = \overline{\psi}^{T}, \ \ \psi = \varphi^{+}; \tag{2-35}$$

это отнюдь не общее свойство сохранятется лишь для функций, преобразующихся по унитарной подгруппе $SU(2)$ группы $SL(2C)$.

Вариант подобного преобразования – простое вращение, реализуемое матрицей (2-5). В качестве примера для этого случая вычисляются лишь «четные» СФ, преобразованные из (2-34). Согласно (2-33), первая «повернутая» функция-строка есть

$$\varphi^{+}_{(1')} = \varphi^{+}_{(1)}U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \quad 1)\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e^{i\alpha/2} \quad e^{-i\alpha/2}), \tag{2-35а}$$

и так как $U \in SU(2)$, по формуле (2-35) сразу определяется столбец

$$\psi^{+}_{(1')} = \varphi^{+}_{(1')}{}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \\ e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}. \tag{2-35б}$$

Аналогично для второго вектора

$$\varphi^{+}_{(2')} = \varphi^{+}_{(2)}U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i \quad 1)\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ie^{i\alpha/2} \quad e^{-i\alpha/2}), \tag{2-36а}$$

$$\psi^{+}_{(2')} = \varphi^{+}_{(2')}{}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ie^{-i\alpha/2} \\ e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}. \tag{2-36б}$$

Собственные функции третьего вектора

$$\varphi^{+}_{(3')} = \varphi^{+}_{(3)}U^{-1} = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha/2} \end{pmatrix} = (0 \ \ e^{-i\alpha/2}) = e^{-i\alpha/2}(0 \quad 1), \tag{2-37а}$$

$$\psi^{+}_{(3')} = \varphi^{+}_{(3')}{}^{+} = e^{i\alpha/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2-37б}$$

испытывают, как видно, фазовое преобразование, не затрагивающее вид третьего вектора, вокруг которого и осуществляется поворот. Вид двух других векторов, конечно, изменяется. Для проверки правильности полученных выражений можно вычислить, например матрицу-вектор $\mathbf{q}_{2'}$ по формуле (2-31)

$$\mathbf{q}_{2'} = i\left(2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ie^{-i\alpha/2} \\ e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(-ie^{i\alpha/2} \ \ e^{-i\alpha/2}) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\alpha} \\ ie^{-i\alpha} & 0 \end{pmatrix};$$

ее вид, как и должно быть, совпадает с соответствующим выражением в (2-6).

Столь подробное рассмотрение, казалось бы, несложных вопросов, тем не менее, не праздно. Уже было замечено, что Q-базис (2-6) с геометрической точки зрения реализует поворот исходного базиса на угол α вокруг оси – прямой линии, – направление которой задает единичный вектор $\mathbf{q}_3$. Положение начала базиса на линии в этой ситуации несущественно, поэтому поворот базиса по сути описывает поворот всей линии вокруг самой себя. При этом вектор $\mathbf{q}_3$ оказывается неизменным только с точки зрения «грубого» трехмерия: его структурные компоненты – спинорные собственные функции, – как видно из (2-37), при этом осуществляют фазовый поворот, не заметный с точки зрения «наблюдений» из трехмерного пространства.

Таким образом, кватернионная математика обладает весьма привлекательным свойством: она позволяет на классическом языке описывать классически ненаблюдаемые явления, например, повороты прямой линии вдоль самой себя.[8]

Алгебраические свойства собственных функций

Часть свойств собственных функций уже отмечена выше:

- каждый вектор триады $\mathbf{q}_k$ имеет две пары СФ: четную пару (левую $\varphi^{+}_{(k)}$ и правую $\psi^{+}_{(k)}$ с собственным значением $+i$) и нечетную пару (левую $\varphi^{-}_{(k)}$ и правую $\psi^{-}_{(k)}$ с собственным значением $-i$);
- из любой (четной или нечетной) пары СФ можно построить свойственный этой паре вектор базиса (нет суммирования по повторяющимся индексам в скобках)

$$\mathbf{q}_{(k)} = \pm i(2C^{\pm}_{(k)} - 1) = \pm i(2\psi^{\pm}_{(k)}\varphi^{\pm}_{(k)} - 1)\,;$$

- из простейших СФ (2-34) любые другие СФ получаются спинорным преобразованием

$$U \in SL(2,C) \quad \Rightarrow \quad \psi^{\pm}_{(k')} = U\psi^{\pm}_{(k)}\ , \quad \varphi^{\pm}_{(k')} = \varphi^{\pm}_{(k)}U^{-1}\,;$$

- в простейшем случае (2-34) и в случае преобразования СФ матрицами группы $SU(2)$ левые функции получаются эрмитовым сопряжением правых и наоборот: для (2-34) и в случае

$$U \in SU(2) \ \Rightarrow \ \varphi = \psi^{+} = \overline{\psi}^{T}\,, \ \ \psi = \varphi^{+}\,;$$

- СФ одного вектора и одной четности нормированы на единицу

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\psi^{\pm}_{(k)} = 1\,;$$

- СФ одного вектора, но различной четности ортогональны друг другу

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\psi^{\mp}_{(k)} = 0\,.$$

Помимо перечисленных свойств для СФ, относящихся к одному вектору, представляет интерес взаимоотношение СФ, свойственных разным векторам одного базиса, в частности, их взаимные свертки.

Для любого набора векторных кватернионных единиц можно составить двенадцать «непарных скалярных произведений» одной четности – сверток левых и правых СФ одной четности с различными номерами векторов

[8] Противоположное мнение высказано в книге [39] на стр. 129: “... говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.”

$$\sigma_{12}^{\pm} = \varphi_{(1)}^{\pm}\psi_{(2)}^{\pm}\ ,\ \sigma_{21}^{\pm} = \varphi_{(2)}^{\pm}\psi_{(1)}^{\pm},$$
$$\sigma_{31}^{\pm} = \varphi_{(3)}^{\pm}\psi_{(1)}^{\pm}\ ,\ \sigma_{13}^{\pm} = \varphi_{(1)}^{\pm}\psi_{(3)}^{\pm},$$
$$\sigma_{23}^{\pm} = \varphi_{(2)}^{\pm}\psi_{(3)}^{\pm}\ ,\ \sigma_{32}^{\pm} = \varphi_{(3)}^{\pm}\psi_{(2)}^{\pm}, \quad (2\text{-}38)$$

а также аналогичных сверток СФ разной четности

$$\sigma_{12}^{+-} = \varphi_{(1)}^{+}\psi_{(2)}^{-}\ ,\ \sigma_{12}^{-+} = \varphi_{(1)}^{-}\psi_{(2)}^{+}\ ,\ \sigma_{21}^{+-} = \varphi_{(2)}^{+}\psi_{(1)}^{-}\ ,\ \sigma_{21}^{-+} = \varphi_{(2)}^{-}\psi_{(1)}^{+}\ ,$$
$$\sigma_{31}^{+-} = \varphi_{(3)}^{+}\psi_{(1)}^{-}\ ,\ \sigma_{31}^{-+} = \varphi_{(3)}^{-}\psi_{(1)}^{+}\ ,\ \sigma_{13}^{+-} = \varphi_{(1)}^{+}\psi_{(3)}^{-}\ ,\ \sigma_{13}^{-+} = \varphi_{(1)}^{-}\psi_{(3)}^{+}\ ,$$
$$\sigma_{23}^{+-} = \varphi_{(2)}^{+}\psi_{(3)}^{-}\ ,\ \sigma_{23}^{-+} = \varphi_{(2)}^{-}\psi_{(3)}^{+}\ ,\ \sigma_{32}^{+-} = \varphi_{(3)}^{+}\psi_{(2)}^{-}\ ,\ \sigma_{32}^{-+} = \varphi_{(3)}^{-}\psi_{(2)}^{+}\ , \quad (2\text{-}39)$$

Но поскольку сразу все СФ одного базиса преобразуются одинаковыми спинорными матрицами по правилу (2-33) (третье свойство из вышеперечисленных) все скаляры (2-38), (2-39) являются инвариантами:

$$\sigma_{kj} = \varphi_k\psi_j = \varphi_k U^{-1}U\psi_j = \varphi_{k'}\psi_{j'} = \sigma_{k'j'}\ ,$$

они не зависят от выбора представления векторных кватернионных единиц. Достаточно подсчитать их для случая простейшего представления (2-34).

Свертки СФ одной четности:

$$\sigma_{12}^{\pm} = \frac{1-i}{2} \equiv \sqrt{-\frac{i}{2}}, \quad (2\text{-}40\text{а})$$

$$\sigma_{21}^{\pm} = \frac{1+i}{2} \equiv \sqrt{\frac{i}{2}}, \quad (2\text{-}40\text{б})$$

$$\sigma_{31}^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (2\text{-}40\text{в})$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (2\text{-}40\text{г})$$

$$\sigma_{23}^{+} = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \sigma_{23}^{-} = \frac{i}{\sqrt{2}} \equiv \sqrt{-\frac{1}{2}}, \quad (2\text{-}40\text{д})$$

$$\sigma_{32}^{+} = \sqrt{\frac{1}{2}},\ \ \sigma_{32}^{-} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \equiv -\sqrt{-\frac{1}{2}}. \quad (2\text{-}40\text{е})$$

Свертки СФ разной четности:

$$\sigma_{12}^{+-} = \sigma_{12}^{-+} = \frac{1+i}{2} \equiv \sqrt{\frac{i}{2}}, \quad (2\text{-}41\text{а})$$

$$\sigma_{21}^{+-} = \sigma_{21}^{-+} = \frac{1-i}{2} \equiv \sqrt{-\frac{i}{2}}, \quad (2\text{-}41\text{б})$$

$$\sigma_{31}^{+-} = -\sigma_{31}^{-+} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ , \quad (2\text{-}41\text{в})$$

$$\sigma_{13}^{+-} = -\sigma_{13}^{-+} = -\sqrt{\frac{1}{2}}\ , \quad (2\text{-}41\text{г})$$

$$\sigma_{23}^{+-} = -\frac{i}{\sqrt{2}} = -\sqrt{-\frac{1}{2}}\,,\ \sigma_{23}^{-+} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,, \tag{2-41д}$$

$$\sigma_{32}^{+-} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,,\ \sigma_{32}^{-+} = \frac{i}{\sqrt{2}} \equiv \sqrt{-\frac{1}{2}}\,. \tag{2-41е}$$

Теперь стоит отметить следующее обстоятельство. Выше показано, что из трех кватернионных единиц независимы лишь две: третья получается произведением двух первых, хотя эта зависимость – не линейная. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли выразить СФ, принадлежащую третьему – зависимому – вектору, через две первые – независимые? Эта задача решается с помощью инвариантов (2-40).

С помощью формулы (2-31) часть таблицы кватернионного умножения например,

$$\mathbf{q_3} = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2$$

можно представить в спинорном виде (сначала через четные СФ)

$$i(2\psi_{(3)}^{+}\varphi_{(3)}^{+} - 1) = i\,(2\,\psi_{(1)}^{+}\varphi_{(1)}^{+} - 1)\,i\,(2\psi_{(2)}^{+}\varphi_{(2)}^{+} - 1)\,,$$

откуда после домножения справа на $\psi_{(3)}^{+}$ и несложных вычислений следует

$$\psi_{(3)}^{+} = (i-1)\,[(2\sigma_{12}^{+}\sigma_{23}^{+} - \sigma_{13}^{+})\,\psi_{(1)}^{+} - \sigma_{23}^{+}\psi_{(2)}^{+}]\ ,$$

или, с использованием (2-39)

$$\psi_{(3)}^{+} = \frac{1+i}{2}\psi_{(1)}^{+} + \frac{1-i}{2}\psi_{(2)}^{+} = \sqrt{i}\psi_{(1)}^{+} + \sqrt{-i}\psi_{(2)}^{+}\,. \tag{2-42а}$$

В отличие от нелинейной взаимосвязи между матрицами-векторами кватернионного базиса, зависимость между их собственными функциями оказывается линейной! Понятно, что левые СФ определяются по формуле

$$\varphi_{(3)}^{+} = \frac{1-i}{2}\varphi_{(1)}^{+} + \frac{1+i}{2}\varphi_{(2)}^{+} = \sqrt{-i}\varphi_{(1)}^{+} + \sqrt{i}\varphi_{(2)}^{+}\,. \tag{2-42б}$$

Аналогично для СФ противоположной четности

$$\psi_{(3)}^{-} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}(\psi_{(1)}^{-} - \psi_{(2)}^{-}) = \sqrt{-i}\psi_{(1)}^{-} - \sqrt{-i}\psi_{(2)}^{-}\,, \tag{2-42в}$$

$$\varphi_{(3)}^{-} = \frac{1+i}{2}(\varphi_{(1)}^{-} - \varphi_{(2)}^{-}) = \sqrt{i}\varphi_{(1)}^{-} - \sqrt{i}\varphi_{(2)}^{-}\,. \tag{2-42г}$$

С применением соотношений (2-40), (2-41) несложно убедиться в том, что условия нормировки на единицу и условия ортогональности для СФ третьей матрицы-вектора кватернионного базиса, из формул (2-42) следуют автоматически.

Итак, существуют два набора $\{\varphi_{(k)}^{+},\ \psi_{(k)}^{+}\}$ и $\{\varphi_{(k)}^{-},\ \psi_{(k)}^{-}\}$, любой из которых подходит для конструирования одной и той же триады $\mathbf{q}_k$. Поэтому описание кватернионного трехмерного пространства общего вида (точнее, его метрических свойств) можно начинать не с матриц-векторов базиса, а на более «раннем этапе» – с введения одного набора спинорных функций. При этом каждый полный набор, (включающий и четные, и нечетные СФ) должен иметь всего три комплексных независимых параметра. Действительно, если исходным является четный набор $\{\varphi_{(k)}^{+},\ \psi_{(k)}^{+}\}$, то в силу (2-42а,б) независимы лишь четыре спинора, например, $\{\varphi_{(1)}^{+},\ \psi_{(2)}^{+};\ \varphi_{(1)}^{+},\ \psi_{(2)}^{+}\}$, содержащие всего 8 комплексных функций. Два условия нормировки и инварианты (2-40а,б) сокращают число независимых функций до четырех. Наконец, каждая пара исходных СФ определена с точностью до фазового множителя, который исключается выбором калибровки, то есть остаются как раз искомые три комплексные независимые функции (или шесть действительных).

Здесь следует заметить, что рассмотренное простейшее представление СФ в виде 2-строк и столбцов не единственно (как и представление векторов 2×2-матрицами, что отмечалось выше.[9] В частности, можно представить действительную и мнимую единицу множества комплексных чисел 2×2-матрицами

$$1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad i=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};$$

тогда, если кватернионные единицы приобретают форму 4×4-матриц, то спинорные СФ становятся 2×4 и 4×2-матрицами. Например, простейшие СФ (2-34в) имеют вид

$$\varphi^{\pm}_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \mp 1 & 1 & 0\\ \pm 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \psi^{\pm}_{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \pm 1\\ \mp 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{2-43}$$

весьма отличный от вида стандартных четырехкомпонетных спиноров (скажем, теории Дирака).

Столь подробное обсуждение собственных функций кватернионного базиса не случайно. Во-первых, они сами по себе являются интересным математическим объектом, в литературе не описанным и не изученным. Во-вторых, будучи компонентами матриц-векторов, они определенно связаны с описанием фундаментальной структуры пространства и его метрических свойств. Наконец, СФ оказываются весьма полезным инструментом для определения проекций векторов на выделенные направления.

Собственные функции как проекторы

Наличие для каждой матрицы-вектора левой и правой СФ каждой четности наводит на мысль попытаться использовать их, как в квантовой механике, для определения значений различных матричных операторов. При этом собственные – «точные» – значения базисных векторов известны

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_k\psi^{\pm}_{(k)}=\pm i\,\varphi^{\pm}_{(k)}\psi^{\pm}_{(k)}=\pm i \tag{2-44}$$

(нет суммирования по k). Понятно, что слева и справа от оператора должны стоять функции одной четности, в противном случае, в силу ортогональности СФ разной четности, выражение типа (2-44) равно нулю.

Следующий шаг – проверить действие одного из операторов триады, например, $\mathbf{q}_1$, на СФ, свойственные другому оператору, например, $\varphi^{+}_{(2)}$, $\psi^{+}_{(2)}$. Это просто сделать, представляя матрицы-вектора через СФ (2-31) и используя инварианты (2-40)

$$\varphi^{+}_{(2)}\mathbf{q}_1\psi^{+}_{(2)}=i(2\varphi^{+}_{(2)}\psi^{+}_{(1)}\varphi^{+}_{(1)}\psi^{+}_{(2)}-1)=i(2\sigma^{+}_{21}\sigma^{+}_{12}-1)=0\,. \tag{2-45}$$

Несложно проверить, что любые свертки типа (2-45) исчезают (нет суммирования по k)

$$\varphi^{\pm}_{(k)}\mathbf{q}_j\psi^{\pm}_{(k)}=0\,,\;\; k\neq j\,. \tag{2-46}$$

[9] См. главу I, параграф «Кватернионы», раздел «Представления мнимых единиц».

Поскольку геометрически $\mathbf{q}_k$ есть три взаимно ортогональных единичных вектора, можно предположить, что выражения (2-44) и (2-46) представляют собой проекции одного из векторов, соответственно, самого на себя и на два других вектора. При этом из (2-44) следует, что длина вектора равна единице (мнимой: i); четные СФ проецируют на направление своего вектора, нечетные – на противоположное направление; тождество (2-46) описывает ортогональность триады. Оба выражения (2-44) и (2-46) можно представить одним равенством

$$\varphi^{\pm}_{(k)} \mathbf{q}_j \psi^{\pm}_{(k)} = \pm i \, \delta_{jk} \, . \tag{2-47}$$

Чтобы убедиться в правильности предположения о проекциях, можно рассмотреть выражения, аналогичные (2-47), но для величин, принадлежащих различным базисам. Пусть матрицы-векторы $\mathbf{q}_{k'}$ представляют базис, произвольно повернутый в пространстве относительно исходного $\mathbf{q}_j$; собственные функции последнего $\varphi^{\pm}_j$, $\psi^{\pm}_j$ можно применить для проецирования. Пусть действительный векторный поворот общего вида есть $\mathbf{q}_{k'} = R_{k'j} \mathbf{q}_j$. Тогда в результате действия $\mathbf{q}_{k'}$ на СФ $\varphi^{\pm}_j$, $\psi^{\pm}_j$

$$\varphi^{\pm}_{(j)} \mathbf{q}_{k'} \psi^{\pm}_{(j)} = \varphi^{\pm}_{(j)} R_{k'n} \mathbf{q}_n \psi^{\pm}_{(j)} = \pm i R_{k'n} \delta_{nj} = \pm i R_{k'j} \tag{2-48}$$

получаются компонеты матрицы поворота (домноженные на $\pm i$), которые, как нетрудно понять, представляют собой косинусы углов между векторами повернутого и исходного базисов. Следовательно, комбинация (2-48) для матриц-векторов, преобразованных из исходного базиса группой $SO(3,R)$, действительно, определяет проекции векторов повернутого базиса на исходный. В связи с этим ниже СФ будут иногда именоваться проекторами.

Удобно ввести символ проекции одного вектора на второй. Например, пусть проекция вектора $\mathbf{q}_{k'}$ на положительное направление вектора $\mathbf{q}_j$ обозначается как

$$\langle \mathbf{q}_{k'} \rangle_j \equiv -i \varphi^{+}_{(j)} \mathbf{q}_{k'} \psi^{+}_{(j)} = \cos[\angle(\mathbf{q}_{k'}, \mathbf{q}_j)] \, , \tag{2-49а}$$

на отрицательное направление –

$$\langle \mathbf{q}_{k'} \rangle^{-}_j \equiv -i \varphi^{-}_{(j)} \mathbf{q}_{k'} \psi^{-}_{(j)} = -\cos[(\angle(\mathbf{q}_{k'}, \, \mathbf{q}_j)] \, ; \tag{2-49б}$$

аргумент косинуса – угол между $\mathbf{q}_{k'}$ и $\mathbf{q}_j$.

Выше и в формулах (2-49) проекции вычисляются с помощью СФ, есть и иные способы. Более детально процедура определения проекций векторов-кватернионов трехмерного пространства конфигураций будет рассмотрена в следующем разделе.

В том случае, когда поворот исходного базиса осуществляется матрицами общего вида $O \in SO(3,C)$, аргументы направляющих косинусов оказываются комплексными; примеры таких обобщенных проекций приведены во второй части данной работы, в разделах, посвященных гиперболическим поворотам.

Наконец выражение (2-48) можно представить с точки зрения спинорных преобразований

$$\varphi^{\pm}_{(j)} \mathbf{q}_{k'} \psi^{\pm}_{(j)} = \varphi^{\pm}_{(j)} U \mathbf{q}_k U^{-1} \psi^{\pm}_{(j)} = \varphi^{\pm}_{(j'')} \mathbf{q}_k \psi^{\pm}_{(j'')} \, ,$$

или

$$\langle \mathbf{q}_{k'} \rangle^{\pm}_j = \langle \mathbf{q}_k \rangle^{\pm}_{j''} \, , \tag{2-50}$$

где

$\varphi^{\pm}_{(j'')} = \varphi^{\pm}_{(j)} U$, $\psi^{\pm}_{(j'')} = U^{-1}\psi^{\pm}_{(j)}$ – СФ базиса $\mathbf{q}_{k''}$, повернутого относительно исходного противоположно повороту $\mathbf{q}_{k'}$. Равенство (2-50), по существу, подтверждает геометрически очевидный факт: проекция повернутого вектора на направление исходного равна проекции исходного вектора на направление повернутого.

Векторы-кватернионы, их проекции и форм-инвариантность

В этом параграфе речь пойдет только о Q-базисе, то есть только о триадах векторных кватернионных единиц, преобразуемых группами $SU(2)$ или $SO(3,R)$.

Пусть в трехмерном пространстве конфигураций направляющим векторам декартовой системы координат соответствует Q-базис $\mathbf{q}_k$. Тогда любой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_k$, определенный в этом пространстве, может быть разложен по векторам Q-базиса

$$\mathbf{a} \equiv a_k \mathbf{q}_k . \tag{2-51}$$

Разложение (2-51) есть вектор-кватернион, или Q-вектор.

Проекции Q-вектора на произвольное направление можно определить двумя способами: с помощью спинорных проекторов и методом разложения по одному базису.

Первый способ базируется на формуле (2-49а), в которой фигурируют лишь четные СФ, определяющие проекцию на положительное направление заданной оси. Если ось совпадает с одним из векторов Q-базиса $\mathbf{q}_j$, а Q-вектор разложен по базису $\mathbf{q}_{k'}$: $\mathbf{a} \equiv a_{k'}\mathbf{q}_{k'}$, то проекция **a** на направление $\mathbf{q}_j$ есть

$$\langle \mathbf{a} \rangle_j = -i\, a_{k'} \varphi^{+}_{(j)} \mathbf{q}_{k'} \psi^{+}_{(j)} = a_{k'} R_{k'j} = a_j . \tag{2-52}$$

Справедливость этого важнейшего равенства достаточно проиллюстрировать примером одного простого вращения.

Пусть базис $\mathbf{q}_{k'}$ получается из $\mathbf{q}_j$ простым поворотом на угол α вокруг $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{3'}$

$$\mathbf{q}_{k'} = R_3^{\alpha} \mathbf{q}_k ,$$

а вектор $\vec{a}$ с компонентами, заданными в $\mathbf{q}_{k'}$, лежит в плоскости поворота и составляет угол λ с направлением $\mathbf{q}_{1'}$

$$a_{k'} = (a_{1'} = a\cos\lambda,\ a_{2'} = a\sin\lambda,\ 0) . \tag{2-53}$$

Компонеты $\vec{a}$ в базисе $\mathbf{q}_j$ элементарно вычисляются из геометрических соображений

$$a_1 = a\cos(\lambda+\alpha) = a_{1'}\cos\alpha - a_{2'}\sin\alpha ,$$
$$a_2 = a\sin(\lambda+\alpha) = a_{1'}\sin\alpha + a_{2'}\cos\alpha ,$$

что есть результат матричного умножения вектора (2-53) и матрицы R_3^{α} (2-22), то есть в точности соответствует определению проекций (2-52). Поскольку любой как угодно сложный поворот базиса может быть представлен произведением простых вращений, формула (2-52) верна в общем случае.

Отсюда следует замечательное свойство форм-инвариантности (или просто инвариантности) Q-векторов

$$\mathbf{a} = a_k \mathbf{q}_k = a_{k'} \mathbf{q}_{k'} , \tag{2-54}$$

которое означает: форма записи Q-вектора не зависит от выбора базиса.

Равенство (2-54) сразу доказывается преобразованием его правой части «векторным» образом: $a_{k'} R_{k' j} \mathbf{q}_j$ и учетом определения проекции (2-52).

Кажущееся на первый взгляд простым и естественным свойство инвариантности (2-54) Q-векторов относительно произвольных преобразований группы $SO(3,R)$ весьма не тривиально и не менее того полезно.

Нетривиальность в том, что инвариантом группы действительных вращений оказывается не только скаляр – длина вектора, как это обычно считать, но векторная величина. Специфика свойств Q-базиса автоматически сохранять при любых поворотах ортонормированность своих направляющих векторов $\mathbf{q}_k$ полностью «нейтрализует» в (2-54) роль углов, которые, конечно, при вращениях изменяются, но на инвариантность Q-вектора не влияют. Длина вектора, естественно, тоже есть инвариант вращений – как квадрат уже инвариантой величины (2-54)[10]

$$\mathbf{a}^2 = a_k \mathbf{q}_k a_j \mathbf{q}_j = -a_k a_j \delta_{kj} = -a^2 .$$

Свойство инвариантности Q-векторов (2-54) к тому же полезно с практической точки зрения. В частности, на нем основан упомянутый выше второй способ определения проекций векторов

$$a_{k'} \mathbf{q}_{k'} = a_k \mathbf{q}_k = a_k R_{kj'} \mathbf{q}_{j'} \quad \Rightarrow \quad a_{k'} = a_n R_{nk'}, \qquad (2\text{-}55)$$

не требующий вычисления спинорных проекторов; достаточно знать все исходные проекции вектора и матрицу поворота Q-базиса.

Но более существенна сама суть инвариантности, благодаря которой оказывается возможным записывать векторные величины, не зависящие от произвольных вращений. Эта возможность будет использована ниже для записи уравнений механики во вращающихся системах отсчета.

[10] Для определения модулей векторов можно было бы использовать операцию кватернионного сопряжения: $\mathbf{a}\bar{\mathbf{a}} = a^2$, что иногда и будет делаться. Однако наличие отрицательных квадратов, то есть формальная нормированность величин на мнимую единицу не мешает ни теоретическим выводам, ни практическим расчетам.