Дифференцирование Q-базиса и кватернионная связность

Кватернионные величины могут быть достаточно гладкими функциями параметров, от которых зависят векторные кватернионые единицы.[11] В частности, по отношению к углам вращений таковыми являются действительные Q-векторы и сам Q-базис: в их матричные части входят «хорошие» гармонические функции углов поворота. Имея это в виду на примере Q-базиса (впрочем, не нарушая при этом общности рассуждений) можно рассмотреть основные дифференциальные соотношения, свойственные векторным кватернионным единицам.

Как для всякого ортонормированного репера, малые приращения Q-базиса выражаются через сами векторы этого Q-базиса $\mathbf{q}_k$ с некоторыми коэффициентами ω, носящими название связности (в данном случае – кватернионной, или Q-связности,[12] кроме того – собственной)

$$d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi\, kn}\mathbf{q}_n\, d\Phi_\xi\,. \tag{2-56}$$

Как видно, в общем случае индексы Q-связности разнородны. Один индекс нумерует аргументы Q-базиса (параметры группы: для $SO(3,R)$ три параметра, для $SO(3,C)$ – шесть), два других индекса – векторные. Из (2-56) следует антисимметрия связности по векторным индексам. Действительно, дифференциал от произведения двух единиц Q-базиса, с одной стороны, есть

$$\begin{aligned} d(\mathbf{q}_k\,\mathbf{q}_n) &= d\mathbf{q}_k\,\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_k\,d\mathbf{q}_n = (\omega_{\xi\, km}\mathbf{q}_m\mathbf{q}_n + \omega_{\xi\, nm}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_m)d\Phi_\xi = \\ &= [-(\omega_{\xi\, kn} + \omega_{\xi\, nk}) + (\omega_{\xi\, km}\,\varepsilon_{mnp} + \omega_{\xi\, nm}\,\varepsilon_{kmp})\,\mathbf{q}_p)d\Phi_\xi\,, \end{aligned} \tag{2-57а}$$

но с другой стороны,

$$d(\mathbf{q}_k\,\mathbf{q}_n) = d(-\delta_{kn} + \varepsilon_{knm})\mathbf{q}_m = \varepsilon_{knm}\,\omega_{\xi\, mp}\mathbf{q}_p\, d\Phi_\xi\,. \tag{2-57б}$$

Скалярные и векторные слагаемые в (2-57а) и (2-57б) приравниваются по отдельности, откуда и следует антисимметрия связности

$$\omega_{\xi\, kn} + \omega_{\xi\, nk} = 0 \tag{2-58а}$$

$$\omega_{\xi\, km}\,\varepsilon_{mnp} + \omega_{\xi\, nm}\,\varepsilon_{kmp} - \omega_{\xi\, mp}\,\varepsilon_{knm} = 0\,; \tag{2-58б}$$

домножение (2-58б) на ε_{knj} приводит к соотношению, эквивалентному (2-58а).

Теперь, с учетом антисимметрии, можно подсчитать максимальное число N компонент связности по формуле $N = G\dfrac{p(p-1)}{2}$, где G – число аргументов Q-базиса, $p = 3$ – число размерностей векторного пространства. Для группы $SO(3,R)$: $G = 3$, $N = 9$; для $SO(3,C)$: $G = 6$, $N = 18$.

Из уравнения (2-56) определяется производная базисного вектора по параметрам вращения

$$\frac{\partial}{\partial\Phi_\xi}\mathbf{q}_k(\Phi) \equiv \partial_\xi\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi\, kn}\mathbf{q}_n\,. \tag{2-59}$$

Формулу для вычисления связности можно записать, по крайней мере, в трех вариантах: (1) связность как функция конкретного Q-базиса, (2) связность как функция спинорных матриц и (3) связность как функция векторных матриц поворота.

[11] Компоненты и базисные векторы кватернионов рассматриваются как функции действительных переменных.

[12] В названии подчеркивается отношение к природе репера. Однако, как показано ниже, связность строится из объектов, реализующих представление группы, и не зависит от вида репера (Q-базис или триада полярных векторов).

Первый вариант формулы – выражение через производные Q-базиса – получается из формулы (2-59) с помощью проекторов (например, четных) и с применением соотношения (2-47)

$$\omega_{\xi\, kn} = -i\varphi^{+}_{(n)}(\partial_{\xi}\mathbf{q}_k)\psi^{+}_{(n)} \equiv -i\left\langle \partial_{\xi}\mathbf{q}_k \right\rangle^{+}_{n}. \qquad (2\text{-}60)$$

Эту формулу удобно использовать, если известен явный вид представления Q-базиса; при этом проекторы вычисляются по формулам (2-25).

Второй вариант – выражение связности через производные спинорных матриц. Для этого переменный Q-базис следует представить как результат спинорного преобразования (2-3) постоянного базиса (2-4), (2-34), последний здесь помечен тильдой:

$$\mathbf{q}_k = U(\Phi)\mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1}(\Phi).$$

Тогда из формулы (2-59) следует

$$\partial_{\xi}U\mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1} + U\mathbf{q}_{\tilde{k}}\partial_{\xi}U^{-1} = \omega_{\xi\, kn}U\mathbf{q}_{\tilde{n}}U^{-1} \quad .$$

Умножение этого выражения слева на U^{-1}, а справа на U после простого преобразования дает

$$U^{-1}\partial_{\xi}U\mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1}\partial_{\xi}U = \omega_{\xi\, kn}\mathbf{q}_{\tilde{n}},$$

откуда связность выделяется с помощью известных проекторов постоянного базиса (2-34), например, четных

$$\omega_{\xi\, kn} = -i\left\langle U^{-1}\partial_{\xi}U\mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1}\partial_{\xi}U \right\rangle^{+}_{\tilde{n}}. \qquad (2\text{-}61)$$

Эту формулу удобно использовать, если заданы матрицы спинорного преобразования от постоянного Q-базиса к переменному.

Третий вариант – выражение связности через производные векторных матриц поворота – получается аналогично второму, но оказывается существенно проще:

$$\partial_{\xi}\mathbf{q}_k = \partial_{\xi}R_{k\tilde{n}}(\Phi)\mathbf{q}_{\tilde{n}} = \partial_{\xi}R_{k\tilde{n}}\, R_{m\tilde{n}}\, \mathbf{q}_m;$$

из последнего равенства, после приравнивания коэффициентов при одинаковых векторах базиса, сразу следует выражение для связности

$$\omega_{\xi\, km} = \partial_{\xi}R_{k\tilde{n}}R_{m\tilde{n}}. \qquad (2\text{-}62)$$

Понятно, что для векторного преобразования общего вида (2-7) – с комплексными параметрами – формула (2-62) принимает вид

$$\omega_{\xi\, km} = \partial_{\xi}O_{k\tilde{n}}O_{m\tilde{n}}. \qquad (2\text{-}63)$$

Вычислять связность по формулам (2-62), (2-63) целесообразно, если заданы матрицы поворота исходного постоянного репера.

Формулу (2-63) также удобно использовать для установления трансформационных свойств Q-связности. Пусть $\mathbf{q}_k = O_{kp'}\mathbf{q}_{p'}$. Тогда

$$\partial_{\xi}\mathbf{q}_k = \partial_{\xi}O_{kp'}\mathbf{q}_{p'} + O_{kp'}\omega_{\xi\, p'n'}\mathbf{q}_{n'} = \omega_{\xi\, km}\mathbf{q}_m,$$

или после домножения на $O_{mn'}$, переименования индексов и «освобождения» от базиса

$$\omega_{\xi\, kn} = O_{kp'}O_{mn'}\omega_{\xi\, p'n'} + O_{mp'}\partial_{\xi}O_{kp'}.$$

Последнее выражение демонстрирует нетензорный характер преобразованияя Q-связности при переходе от репера $\mathbf{q}_{p'}$ к реперу $\mathbf{q}_k$: к однородно преобразующейся величине добавляется слагаемое, которое в свою очередь, согласно (2-63), имеет вид Q-связности $\omega'_{\xi\, kn} = O_{mp'}\partial_\xi O_{kp'}$, вычисленной однако для «усеченного» преобразования репера $\mathbf{q}_k$ – не от «фундаментального» специального представления $\mathbf{q}_{\tilde{m}}$, а от «промежуточного» представления $\mathbf{q}_{p'}$. При этом формула преобразования принимает вид

$$\omega_{\xi\, kn} = O_{kp'}O_{mn'}\omega_{\xi\, p'n'} + \omega'_{\xi\, kn}. \tag{2-63a}$$

Существенно, что сам объект кватернионной связности, равно как и формула преобразования (2-63a) в приложениях могут иметь ясную трактовку. О вариантах физической и геометрической интерпретации Q-связности и формулы (2-63a) – в следующем разделе.

Локализация параметров R-вращений и геометрическая интерпретация некоторых коэффициентов вращения

Параметры Q-базиса могут зависеть от времени и пространственных координат – именно такая ситуация существенна для физических приложений.

Зависимость Q-базиса от времени наблюдателя

Пусть параметры репера, полученного в результате преобразований поворота из постоянного Q-базиса, зависят от времени наблюдателя, который связан с этим репером. Иными словами, наблюдатель, его часы, измеряющие скалярное время, и Q-базис в качестве направляющих векторов декартовой системы координат – все вместе составляют нерелятивистскую систему отсчета (при вращениях Q-базиса векторными матрицами с действительными параметрами – R-вращениях – относительного поступательного движения систем отсчета нет). В этом случае естественно определить производную от Q-базиса по времени

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}_k\Phi[(t)] \equiv \dot{\mathbf{q}}_k = \frac{d\Phi_\xi}{dt}\omega_{\xi\, kn}\mathbf{q}_n\ . \tag{2-64}$$

Если обозначить

$$\Omega_{kn} \equiv \frac{d\Phi_\xi}{dt}\omega_{\xi\, kn}\ ,$$

то формула (2-64) принимает известный вид

$$\dot{\mathbf{q}}_k = \Omega_{kn}\mathbf{q}_n\ . \tag{2-65}$$

Нетрудно убедиться в том, что антисимметричная по индексам величина Ω_{kn} в случае одного из простых вращений (2-22) с зависящим от времени параметром представляет собой мгновенную угловую скорость вращения Q-базиса вокруг соответствующей неподвижной оси. В случае двух или нескольких вращений вокруг разных осей эта величина может иметь достаточно сложный вид и трактоваться как обобщенная «неголономная»[13] угловая скорость репера.

Если параметры репера зависят от времени, то формула преобразования связности (2-63a) принимает вид

$$\Omega_{kn} = O_{kp'}O_{mn'}\Omega_{p'n'} + \Omega'_{kn}, \tag{2-65a}$$

[13] В том смысле, что она не является полной производной по времени.

и соответственно может быть интерпретирована как формула сложения обобщенных «угловых скоростей»,[14] наблюдаемых в разных реперах.

При этом:

$\Omega_{kn} = \dot{O}_{k\tilde{m}} O_{n\tilde{m}}$ – обобщенная угловая скорость репера $\mathbf{q}_k$ относительно постоянного (инерциально движущегося) базиса $\mathbf{q}_{\tilde{n}}$, измеренная в базисе $\mathbf{q}_k$;

$\Omega_{p'n'} = \dot{O}_{p'\tilde{m}} O_{n'\tilde{m}}$ – обобщенная угловая скорость репера $\mathbf{q}_{p'}$ относительно постоянного базиса $\mathbf{q}_{\tilde{n}}$, измеренная в базисе $\mathbf{q}_{p'}$;

$O_{kp'} O_{mn'} \Omega_{p'n'}$ – обобщенная угловая скорость репера $\mathbf{q}_{p'}$ относительно постоянного базиса $\mathbf{q}_{\tilde{n}}$, измеренная в базисе $\mathbf{q}_k$;

$\Omega'_{kn} = \dot{O}_{km'} O_{nm'}$ – обобщенная угловая скорость репера $\mathbf{q}_k$ относительно переменного базиса $\mathbf{q}_{p'}$, измеренная в базисе $\mathbf{q}_k$.

Пример. Пусть репер $\mathbf{q}_{p'} \equiv \mathbf{q}'$ получается простым действительным вращением триады $\mathbf{q}_{\tilde{n}} \equiv \tilde{\mathbf{q}}$ вокруг оси № 3 на угол $\alpha(t)$

$$\mathbf{q}' = R_3^{\alpha(t)} \tilde{\mathbf{q}},$$

а репер $\mathbf{q}_k \equiv \mathbf{q}$ есть результат второго простого вращения вокруг оси №1 на угол $\beta(t)$

$$\mathbf{q} = R_1^{\beta(t)} \mathbf{q}',$$

так что в целом

$$\mathbf{q} = R_1^{\beta(t)} R_3^{\alpha(t)} \tilde{\mathbf{q}}.$$

Тогда формула (2-65а) записывается в виде (символ T означает транспонирование)

$$\Omega(\alpha, \beta) = R_1^{\beta}\, \Omega(\alpha)\, R_1^{\beta^T} + \Omega'(\beta),$$

где все величины в правой части имеют очевидный смысл

$\Omega(\alpha)$ – угловая скорость вращения $\mathbf{q}'$ относительно $\tilde{\mathbf{q}}$, измеренная в $\mathbf{q}'$

$$\Omega(\alpha) = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$R_1^{\beta}\, \Omega(\alpha)\, R_1^{\beta^T}$ – угловая скорость вращения $\mathbf{q}'$ относительно $\tilde{\mathbf{q}}$, измеренная в $\mathbf{q}$

$$R_1^{\beta}\, \Omega(\alpha) R_1^{\beta^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ -\cos\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$\Omega'(\beta)$ – угловая скорость вращения $\mathbf{q}$ относительно $\mathbf{q}'$, измеренная в $\mathbf{q}$

[14] Кавычки подчеркивают возможность выражения связности через производные комплексных параметров группы SO(3,C); см. Главу 5 «Кватернионные релятивистские системы отсчета».

$$\Omega'(\beta) = \dot{\beta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом результат «сложения» угловых скоростей – угловая скорость вращения репера $\mathbf{q}$ относительно постоянного репера $\tilde{\mathbf{q}}$, измеренная в репере $\mathbf{q}$, – есть

$$\Omega(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\alpha}\cos\beta & -\dot{\alpha}\sin\beta \\ -\dot{\alpha}\cos\beta & 0 & \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta & -\dot{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Другие характерные примеры вычисления связности рассмотрены в следующем разделе.

Перенос Q-базиса вдоль плоской кривой

Параметры Q-базиса могут зависеть не только от времени, но и от координат. Специальный интерес представляет такая чисто пространственная локализация параметров вращений, когда координатные линии являются огибающими векторов Q-базиса $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k[\Phi_\xi(x_n)]$; при этом все индексы у стандартной в таких случаях (и родственной связности) величины – коэффициентов вращения (см., например [40])

$$\Omega_{nkj} \equiv \frac{d\Phi_\xi}{dx_n}\omega_{\xi kj}$$

оказываются “равноправными” – векторными

$$\frac{d}{dx_n}\mathbf{q}_k \equiv \partial_n \mathbf{q}_k = \Omega_{nkj}\mathbf{q}_j \ . \qquad (2\text{-}66)$$

Величина Ω_{nkj} имеет всего 9 независимых компонент, причем каждая из них имеет определенный геометрический смысл, который выясняется из следующей схемы движения Q-базиса, соответствующей переносу типа Ферми-Уокера (см., например [41]).

Репер переносится вдоль плоской кривой, например, координатной линии x_1 так, что один из базисных векторов, например, $\mathbf{q}_1$ остается касательным к этой линии (рис. 2-1). Пусть вектор $\mathbf{q}_2$ при этом всегда направлен вдоль нормали к кривой. Тогда из формулы, эквивалентной (2-66), следует

$$d\mathbf{q}_1 = \Omega_{112}\mathbf{q}_2 dx_1;$$

проецирование обеих частей этого уравнения на $\mathbf{q}_2$ дает

$$\Omega_{112}\, dx_1 = -i\langle d\mathbf{q}_1 \rangle_2^+. \qquad (2\text{-}67)$$

Длина малой дуги есть $dx_1 = \rho_I(x)\,d\alpha$, где $\rho_I(x)$ – локальный радиус кривой. Правая часть (2-67) есть домноженная на $-i$ проекция на $\mathbf{q}_2$ малого изменения вектора $\mathbf{q}_1$; как видно на рис. 2-1, величина этой проекции равна $-id\alpha$. Таким образом, из (2-67) следует, что рассматриваемый коэффициент вращения с точностью до знака равен локальной первой кривизне заданной кривой

$$\Omega_{112} = -\Omega_{121} = -\frac{1}{\rho_I(x)} \equiv R_I(x)\,. \qquad (2\text{-}68)$$

Нетрудно видеть, что в данном примере Q-базис совершает простое вращение вокруг третьего вектора $\mathbf{q}_3$, который все время остается ортогональным плоскости кривой. Поэтому остальные коэффициенты вращения равны нулю.

Очевидно, что коэффициенты вращения, определяемые аналогично для других плоских координатных линий, суть кривизны координатных кривых; при этом дважды повторяющийся индекс соответствует номеру криволинейной координаты.

Можно рассмотреть иную ситуацию, когда при переносе вдоль координатной линии с параметром x_1 вектор $\mathbf{q}_1$ не изменяется (линия прямая), а векторы $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ претерпевают изменения: могут поворачиваться вокруг $\mathbf{q}_1$. В представлении группы $SO(3,R)$ такое простое вращение описывается матрицей $R_1^{\gamma(x)}$ [см. формулы (2-22)]. При этом малое изменение вектора $\mathbf{q}_2$ есть

$$d\mathbf{q}_2 = \Omega_{12n}\,\mathbf{q}_n dx_1 .$$

Расчет по формуле (2-62) приводит к выражению

$$\Omega_{1kn} = \partial_1 R_1^{\gamma} \left(R_1^{\gamma}\right)^T = \frac{d\gamma}{dx_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

так что в вклад в $d\mathbf{q}_2$ дает всего один коэффициент вращения – со всеми разными индексами

$$\Omega_{123} = -\Omega_{132} = \frac{d\gamma}{dx_1} \;;$$

слагаемого, содержащего Ω_{122} нет в силу антисимметрии по последним индексам, а коэффициент Ω_{121} исчезает, поскольку кривизна линии равна нулю, и $d\mathbf{q}_2$ остается ортогональным $\mathbf{q}_1$. Таким образом, коэффициенты вращения со всеми различными индексами имеют геометрический смысл степени «закрученности» линии вокруг самой себя.

Q-базис как репер Френе-Серре

Для кривой общего вида удобно рассмотреть производную по параметру, характеризующему ее длину (например, *s*). Пусть кривая задана в постоянном Q-базисе $\mathbf{q}_{\tilde{k}}$: $x_{\tilde{k}} = x_{\tilde{k}}(s)$. Вдоль касательного к кривой вектора «скорости» переноса $v_{\tilde{k}} \equiv \frac{d}{ds}x_{\tilde{k}}$ всегда можно направить вектор $\mathbf{q}_1$ нового репера $\mathbf{q}_k$: $\mathbf{q}_1 = \frac{v_{\tilde{k}}}{v}\mathbf{q}_{\tilde{k}}$, где $v = \sqrt{v_{\tilde{n}} v_{\tilde{n}}}$. При этом изменение $\mathbf{q}_1$ есть

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1 = \frac{1}{v}\left(\frac{d}{ds}v_{\tilde{k}} - \frac{v_{\tilde{k}} v_{\tilde{j}}}{v^2}\frac{d}{ds}v_{\tilde{j}}\right)\mathbf{q}_{\tilde{k}} .$$

Вектор «ускорения» переноса $a_{\tilde{k}} \equiv \frac{d}{ds}v_{\tilde{k}}$ можно разложить на составляющие – параллельную $a_{\tilde{k}}^P$ и нормальную $a_{\tilde{k}}^N$ «скорости». Тогда

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1 = \frac{1}{v}\left(a_{\tilde{k}}^N + a_{\tilde{k}}^P - \frac{v_{\tilde{k}} v_{\tilde{j}}}{v^2}(a_{\tilde{j}}^n + a_{\tilde{j}}^P\right)\mathbf{q}_{\tilde{k}} \;;$$

но очевидно $a_{\tilde{k}}^P\mathbf{q}_{\tilde{k}} = a^P\mathbf{q}_1$, $v_{\tilde{j}}a_{\tilde{j}}^P = va^P$, где a^P – модуль параллельного «ускорения», поэтому

$$\left(a_{\tilde{k}}^{P}-\frac{v_{\tilde{k}}v_{\tilde{j}}}{v^{2}}a_{\tilde{j}}^{P}\right)\mathbf{q}_{\tilde{k}}=\left(a^{P}-\frac{vv\,a^{P}}{v^{2}}\right)\mathbf{q}_{1}=0\,.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1=\frac{a_{\tilde{k}}^{N}}{v}\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,.$$

Вдоль вектора $a_{\tilde{k}}^{N}$, ортогонального $\mathbf{q}_1$, можно направить второй вектор репера:

$$\mathbf{q}_2=\frac{a_{\tilde{k}}^{N}}{a^{N}}\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,, \qquad (2\text{-}69)$$

тогда

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1=\frac{a^{N}}{v}\,\mathbf{q}_2=\frac{v}{\rho_I}\mathbf{q}_2\,,$$

где $\rho_I(s)=\dfrac{v^2}{a^N}$ есть радиус кривизны рассматриваемой линии при текущем значении параметра s. Наконец, если параметризация кривой такова, что модуль «скорости» равен единице, то получается известная формула переноса первого вектора репера Френе-Серре – репера Ферми-Уокера с ортами, направленными вдоль кривизн (см., например, [42])

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1=R_I(s)\,\mathbf{q}_2\,, \qquad (2\text{-}70)$$

где $R_I(s)=\dfrac{1}{\rho_I(s)}$ – локальная первая кривизна.

Скорость изменения второго вектора определяется из (2-69)

$$d\mathbf{q}_2=d\,\frac{a_{\tilde{k}}^{N}}{a^{N}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}=\left(\frac{da_{\tilde{k}}^{N}}{a^{N}}-\frac{a_{\tilde{k}}^{N}a_{\tilde{j}}^{N}\,da_{\tilde{j}}^{N}}{(a^{N})^{3}}\right)\mathbf{q}_{\tilde{k}}=\frac{da_{\tilde{k}}^{N}}{a^{N}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}-\frac{a_{\tilde{j}}^{N}da_{\tilde{j}}^{N}}{(a^{N})^{2}}\mathbf{q}_2\,.$$

Вектор изменения нормального «ускорения» переноса, как это сделано выше в отношении самого «ускорения», также можно разложить на составляющие

$$da_{\tilde{k}}^{N}=da_{\tilde{k}}^{NN}+da_{\tilde{k}}^{NP}\,,$$

где вектор da^{NN} направлен вдоль главной нормали, а вектор da^{NP} – перпендикулярно к ней. Тогда

$$d\mathbf{q}_2=\frac{da_{\tilde{k}}^{NN}+da_{\tilde{k}}^{NP}}{a^{N}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}-\frac{a_{\tilde{j}}^{N}(da_{\tilde{j}}^{NN}+da_{\tilde{j}}^{NP})}{(a^{N})^{2}}\mathbf{q}_2=\frac{da_{\tilde{k}}^{NP}}{a^{N}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,,$$

поскольку

$$da_{\tilde{k}}^{NN}\mathbf{q}_{\tilde{k}}=da^{NN}\mathbf{q}_2 \qquad (\text{так как } da^{NN}\uparrow\uparrow\mathbf{q}_2),$$

$$a_{\tilde{j}}^{N}da_{\tilde{j}}^{NN}=a^{N}da^{NN} \qquad (\text{так как } da^{NN}\uparrow\uparrow a^{N}),$$

$$a_{\tilde{j}}^{N}da_{\tilde{j}}^{NP}=0 \qquad (\text{так как } da^{NP}\perp a^{N}).$$

Итак, изменение второго вектора триады есть вектор, лежащий в плоскости, ортогональной первой нормали. Это изменение можно представить составляющими по $\mathbf{q}_1$ и по $\mathbf{q}_3$ – третьему вектору триады, ортогональному одновременно к касательной и к первой нормали кривой (говорят, что этот вектор определяет направление бинормали [43])

$$da^{NP}_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = da^{NP}_1\mathbf{q}_1 + da^{NP}_3\mathbf{q}_3,$$

так что

$$d\mathbf{q}_2 = \frac{da^{NP}_1}{a^N}\mathbf{q}_1 + \frac{da^{NP}_3}{a^N}\mathbf{q}_3 \qquad .$$

Эта геометрическая ситуация представлена на рис.2-2.

Таким образом, «скорость» изменения второго вектора триады есть

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_2 = \frac{1}{a^N}\left(\frac{da^{NP}_1}{ds}\mathbf{q}_1 + \frac{da^{NP}_3}{a^N}\mathbf{q}_3\right). \qquad (2\text{-}71)$$

Если $da^{NP}_3 = 0$, то поворота главной нормали не происходит, значит, кривая плоская. При этом легко определяется смысл первого слагаемого в правой части (2-71). Из подобия треугольников с одинаковым углом α следует

$$\frac{da^{NP}_1}{a^N} = \frac{d\rho_I}{\rho}$$

и модуль первого слагаемого

$$\frac{1}{a^N}\frac{da^{NP}_1}{ds} = \frac{v}{\rho} = R_I\,.$$

Но из рисунка видно, что $da^{NP}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{q}_1$, поэтому первый член в правой части (2-71) отрицателен

$$\frac{1}{a^N}\frac{da^{NP}_1}{ds}\mathbf{q}_1 = -R_I\mathbf{q}_1\,.$$

Коэффициент при $\mathbf{q}_3$ во втором слагаемом определяет изменение направления главной нормали в плоскости, перпендикулярной касательной к линии в данной точке. Эту величину называют второй кривизной [42] или кручением [43]. По-видимому, оба эти термина не слишком удачны. Понятие кручения в современной литературе связывается скорее со свойствами аффинной связности пространства, не зависящими от вида заданной системы отсчета. В то же время второе слагаемое, действительно, характеризует вращение репера вокруг направления касательной к кривой, так что название «кривизна» не точно отражает геометрическую суть. Как отмечено в конце предыдущего раздела, эту величину, которая здесь традиционно обозначается как

$$\frac{1}{a^N}\frac{da^{NP}_3}{ds} \equiv R_{II}$$

более точно было бы назвать закрученностью (twist) кривой.

С учетом вышеизложенного, уравнение (2-71) принимает известный вид

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_2 = -R_I\,\mathbf{q}_1 + R_{II}\,\mathbf{q}_3\,. \qquad (2\text{-}72)$$

Уравнение для «скорости» изменения третьего вектора репера Френе-Серре сразу получается при сопоставлении первых двух уравнений (2-70) и (2-72) с формулой производной от Q-базиса по произвольному параметру

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_k = \frac{d\Phi_\xi}{ds}\omega_{\xi kj}\,\mathbf{q}_j = \Omega_{kj}\,\mathbf{q}_j\,. \qquad (6\text{-}73)$$

Из сравнения (2-70), (2-72) с формулой (2-73), записанной в развернутом виде для первого и второго векторов

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_1 = \Omega_{12}\,\mathbf{q}_2 + \Omega_{13}\,\mathbf{q}_3\,,$$

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_2 = \Omega_{21}\,\mathbf{q}_1 + \Omega_{23}\,\mathbf{q}_3$$

получаются соотношения

$$\Omega_{12} = -\Omega_{21} = R_I\,, \quad \Omega_{23} = -\Omega_{32} = R_{II}\,, \quad \Omega_{13} = -\Omega_{31} = 0\,. \tag{2-74}$$

Отсюда следует, что коэффициенты вращения Q-базиса, эквивалентного реперу Френе-Серре, суть главная кривизна и закрученность кривой. «Скорость» изменения третьего вектора определяется из (2-73) при учете (2-74)

$$\frac{d}{ds}\mathbf{q}_3 = \Omega_{31}\,\mathbf{q}_1 + \Omega_{32}\,\mathbf{q}_2 = -R_{II}\,\mathbf{q}_2\,,$$

что соответствует классической формуле и, безусловно, понятно: при переносе репера вдоль линии ее бинормаль не выходит из плоскости, ортогональной касательной.

<u>Пример: трехмерная цилиндрическая спираль</u>

Вот несложный пример, иллюстрирующий процедуру построения кватернионного репера Френе-Серре. Пусть в декартовых координатах, ассоциируемых с представлением Q-базиса (2-4), задана неплоская кривая линия – цилиндрическая спираль

$$x_{\tilde 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,, \qquad x_{\tilde 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,, \qquad x_{\tilde 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}u\,.$$

Инвариантный Q-вектор «скорости»

$$v_{\tilde k} = \frac{dx_{\tilde k}}{du}$$

с компонентами

$$v_{\tilde 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u\,, \qquad v_{\tilde 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u\,, \qquad v_{\tilde 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

есть $\mathbf{v} \equiv v_{\tilde k}\,\mathbf{q}_{\tilde k} = v\,\mathbf{q}_1$, откуда следует выражение для касательного к линии первого вектора репера

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{v}v_{\tilde k}\,\mathbf{q}_{\tilde k} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i\,e^{-iu} \\ i\,e^{iu} & -1 \end{pmatrix} \tag{2-75а}$$

(параметризация кривой выбрана так, что вектор «скорости» единичен: $v = 1$).

Из первой формулы Френе-Серре (2-70)

$$\frac{d}{du}\mathbf{q}_1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -e^{-iu} \\ -e^{iu} & -0 \end{pmatrix} \equiv R_I\,\mathbf{q}_2$$

(после возведения в квадрат) получается значение главной кривизны

$$R_I = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и явный вид направленного вдоль нее второго вектора репера

$$\mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -e^{-iu} \\ -e^{iu} & -0 \end{pmatrix}. \tag{2-75б}$$

Третий вектор, направленный вдоль второй кривизны, есть произведение двух первых векторов триады

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i\,e^{-iu} \\ -i\,e^{iu} & -1 \end{pmatrix}. \tag{2-75в}$$

Производная $\mathbf{q}_3$ по параметру (третья формула Френе-Серре) есть

$$\frac{d}{du}\mathbf{q}_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -e^{-iu} \\ -e^{iu} & -0 \end{pmatrix} \equiv -R_{II}\,\mathbf{q}_2\,;$$

отсюда сразу следует значение второй кривизны

$$R_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

в данном случае равное значению главной кривизны.

Таким образом, репер $\mathbf{q}_k(u)$ содержит прозрачную и исчерпывающую геометрическую информацию о заданной кривой вне зависимости от выбора системы координат.

Имея в наличии матрицы Q-базиса Френе-Серре, несложно восстановить для этой модели явный вид $SO(3,R)$ -матрицы

$$\mathbf{q}_{\Phi-C} = R_{\Phi-C}\,\tilde{\mathbf{q}} \;\Rightarrow\; R_{\Phi-C} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin u & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos u & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos u & -\sin u & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos u & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{2-76}$$

и с помощью формул (2-25) найти собственные функции Q-базиса (например, четные)

$$\varphi_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{ie^{-iu}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \psi_1^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{ie^{-iu}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \tag{2-77а}$$

$$\varphi_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{iu} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi_2^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-iu} \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{2-77б}$$

$$\varphi_3^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{ie^{-iu}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \psi_3^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{ie^{-iu}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{2-77в}$$

Все три записанные в явном виде представления репера Френе-Серре – Q-базис (2-75), $SO(3,R)$ -векторное (2-26) и спинорное (2-77) – в параметрической бескоординатной форме соответствуют одному и тому же геометрическому объекту: трехмерной цилиндрической спирали.