ГЛАВА 3. ВЕКТОРНЫЕ КВАТЕРНИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Рассмотренные в предыдущих параграфах частные случаи дифференцирования Q-базиса, его связности (коэффициентов вращения) и примеры построения специальных реперов можно сформулировать в общем виде с привлечением понятия векторного кватернионного пространства (Q-пространства).

Как и выше, здесь речь пойдет только о Q-базисе, то есть о триаде $\mathbf{q}_k$, зависящей от действительных параметров $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k(\Phi_\xi)$. Этот объект геометрически нагляден и может быть легко изображен на иллюстрации. Но поскольку рассмотренные здесь построения не связаны с конкретным видом переменных, полученные выводы имеют общий характер и верны для реперов, зависящих от комплексных параметров.

Векторы Q-базиса по своей природе ведут себя как жесткая ортонормированная триада. Поэтому вначале естественно рассмотреть их связь с пространством, касательным к дифференцируемому многообразию.

3.1. КАСАТЕЛЬНОЕ Q-ПРОСТРАНСТВО[1]

Дифференцируемые многообразия и касательные пространства

Пусть задано дифференцируемое многообразие *n* измерений U_N -геометрический объект, состоящий из точек $M \in U_N$, каждой из которых взаимоднозначно поставлено в соответствие множество наборов из *n* чисел – координат $\{y^A\}: M \leftrightarrow \{y^A\}$, $(A = 1,2,\ldots,N)$, причем эти координаты связаны между собой произвольными *K* раз дифференцируемыми преобразованиями $y^{A'} = y^{A'}(y^B)$.[2]

Для дифференцируемого многообразия U_N всегда можно определить собственное касательное многообразие T_N, заданное множеством ортогональных реперов $\mathbf{e}_{(A)}$, генерирующих в T_N семейства координатных линий $M \to \{X^{(A)}\}$ [45], [46], [40]; индексы в скобках $(A) = 1,2,\ldots, N$ нумеруют векторы касательного репера. Приращения координат в T_N и в U_N связаны соотношением

$$dX^{(A)} = g_B^{(A)} dy^B, \tag{3-1}$$

где элементы квадратных матриц $g_B^{(A)}$, иногда называемые в литературе коэффициентами Ламэ, суть функции координат многообразия, так что величины $dX^{(A)}$ не являются, вообще говоря, полными дифференциалами. Координаты $X^{(A)}$ при этом называются неголономными. Если в U_N задана метрика G_{AB} и ей обратная G^{CB}: $G_{AC}G^{BC} = \delta_A^B$, то коэффициенты Ламэ удовлетворяют соотношениям

$$g_A^{(C)} g_B^{(D)} \delta_{CD} = G_{AB},\ g_A^{(C)} g_B^{(D)} G^{AB} = \delta^{CD}.$$

Эти сведения о дифференцируемом многообразии U_N и его собственном касательном многообразии T_N достаточны для того, чтобы сделать следующий существенный шаг. В дальнейшем, без потери общности рассуждений, U_N и T_N будут считаться пространствами.

[1] Результаты этого параграфа опубликованы в работе [105].

[2] Для определенных на многообразии криволинейных координат существенно различать ко- и контравариантные компоненты геометрических объектов.

Кватернионные касательные пространства

Вне зависимости от собственных геометрических свойств U_N каждую его точку M можно отождествить с началом отсчета триады $\mathbf{q}_k$ и задать некоторое правило, связывающее ориентацию триады (для Q-базиса – три параметра Φ_ξ) со значениями координат данной точки

$$M \leftrightarrow \{y^A, \Phi_\xi\}.$$

Множество всех реперов, заданных таким образом на U_N, образует некоторое трехмерное «касательное» многообразие $T(U,\mathbf{q})$.[3] Определение в каждой точке $T(U,\mathbf{q})$ репера по сути предполагает наличие здесь метрики и (по меньшей мере) собственной связности, что позволяет измерять расстояния между точками, вычислять нормы векторных и тензорных величин, а также осуществлять их перенос. Это означает, что $T(U,\mathbf{q})$ является пространством («касательным» Q-пространством). Определенные в пространстве $T(U,\mathbf{q})$ вдоль векторов репера $\mathbf{q}_k$ координаты x_k связаны с неголономными координатами $X^{(A)}$ в собственном касательном пространстве T_N преобразованиями поворота Q-репера относительно ортонормированного репера $\mathbf{e}_{(A)}$ в T_N (рис.3-1)

$$dx_k \equiv h_{k(A)} dX^{(A)}. \qquad (3\text{-}2)$$

При N = 3 матрицы относительного поворота квадратные. Но число размерностей базового многообразия (следовательно, и T_N) не обязательно равно трем – числу размерностей $T(U,\mathbf{q})$, – поэтому матрицы $h_{k(A)}$, вообще говоря, прямоугольные. Их отличительное алгебраическое свойство – «нормировка» на символ Кронекера (по большему числу измерений) и на метрические операторы проецирования большего по числу измерений касательного пространства на меньшее (по меньшему числу измерений).

При $N<3$

$$h_{k(A)} h_k^{(B)} = \delta_A^B, \; h_{k(A)} h_n^{(A)} = b_{kn}, \qquad (3\text{-}3)$$

где b_{kn} – метрический проектор трехмерного пространства $T(U,\mathbf{q})$ на пространство меньшей размерности T_N. Так, если в $T(U,\mathbf{q})$ выделено направление, заданное единичным вектором p_k, то метрический проектор на пространство, ортогональное этому вектору, есть $b_{kn} \equiv \delta_{kn} - p_k p_n$.

При $N>3$

$$h_{k(A)} h_n^{(A)} = \delta_{kn}, \; h_{k(A)} h_{k(B)} = b_{(A)(B)}; \qquad (3\text{-}4)$$

здесь $b_{(A)(B)}$ – оператор проекции T_N на пространство меньшей размерности $T(U,\mathbf{q})$. Так, проектор на подпространство ортогональное единичному вектору $n_{(A)}$, есть $b_{(A)(B)} = \delta_{AB} - n_{(A)} n_{(B)}$.

При $N=3$, очевидно

[3] Вполне касательным $T(U,\mathbf{q})$ будет только для U_3; многообразий с $N<3$ $T(U,\mathbf{q})$ касается «гранью» или «ребром», при $N>3$ $T(U,\mathbf{q})$ вложено в T_N. С позиций формализма расслоенных пространств [46] $U_N \oplus T(\mathbf{q})$, представляет собой специфическое касательное расслоение, базой (главным расслоением) в котором является U_N.

$$h_{k(A)}h_n^{(A)} = \delta_{kn}\,,\ h_{k(A)}h_k^{(B)} = \delta_A^B\,.$$

Из формул (3-1), (3-2) определяется непосредственная связь между координатами в U_N и $T(U,\mathbf{q})$

$$dx_k = h_{k(A)}g_B^{(A)}dy^B = h_{kB}dy^B\,, \qquad (3\text{-}5)$$

где h_{kB} - матрицы поворота в голономном базисе.

Определение вида Q-базиса и матриц h_{kB} как функций координат заданного многообразия составляет задачу построения пространства $T(U,\mathbf{q})$. При этом для простоты анализа (и без потери его общности) параметры репера можно считать достаточно гладкими функциями координат многообразия $\Phi_\xi = \Phi_\xi(y^A)$.

В общем случае правая часть соотношения (3-5) не является полным дифференциалом. Тогда для всего пространства $T(U,\mathbf{q})$ нельзя построить единую координатную сетку: координаты x_k оказываются неголономными.

В частных случаях, однако, все элементы матриц h_{kB} могут быть полными производными. Тогда соотношение (3-1) интегрируется, и построение глобальных систем координат в касательном пространстве оказывается возможным.

Примеры построения касательных Q-пространств

1. Плоское трехмерное пространство.

Простейший пример глобальной системы $U_N \oplus T(U,\mathbf{q})$ – декартова сетка координат в трехмерном плоском пространстве $U_3 \ni M \leftrightarrow \{y^1, y^2, y^3\}$, определенная направлениями произвольного постоянного репера. При этом многообразие совпадает с касательным пространством

$$dX^{(k)} = g_n^{(k)}dy^n = \delta_n^k dy^n = dy^k\,.$$

Векторы Q-базиса в этом случае могут быть заданы как касательные к координатным линиям (углы поворота равны нулю)

$$dx_j = h_{j(k)}dX^{(k)} = \delta_{jk}dX^{(k)} = dy_j\,. \qquad (3\text{-}5а)$$

Реперы с таким свойством называют естественными, или натуральными [40], [47].

Естественный репер несложно построить и для многообразий, наделенных криволинейными «прямоугольными» координатными сетками (при этом, конечно, требуется, чтобы число размерностей многообразия не превышало числа измерений касательного пространства, то есть $n \le 3$).

Для одномерных базовых многообразий – линии времени или произвольной кривой линии в пространстве – процедура построения варианта естественого репера осуществлена выше (репер Френе-Серре).

2. Естественный кватернионный репер на торе.

Двумерное многообразие хорошо иллюстрируется примером тора U_2 (рис. 3-2). Точки его поверхности пронумерованы в трехмерном пространстве с помощью криволинейной координатной сетки $M \leftrightarrow \{y^2, y^3\}$: $[y_1 \equiv 0]$, $y^2 = \alpha$, $y^3 = \beta$; $const = R \ge r = const$; $0 \le \alpha < 2\pi$, $0 \le \beta < 2\pi$. Элемент длины на торе определяется выражением

$$ds^2 = (R + r\cos\beta)^2 d\alpha^2 + rd\beta^2,$$

так что изменения координат в собственном касательном пространстве T_2 суть

$$dX^{(2)} = g_2^{(2)} dy^2 = (R + r\cos\beta)d\alpha\,,$$

$$dX^{(3)} = g_3^{(3)} dy^3 = r\,d\beta\,.$$

В развернутом виде уравнения (3-5а) записываются так

$$dx_1 = h_{1(2)} dX^{(2)} + h_{1(3)} dX^{(3)},$$

$$dx_2 = h_{2(2)} dX^{(2)} + h_{2(3)} dX^{(3)},$$

$$dx_3 = h_{3(2)} dX^{(2)} + h_{3(3)} dX^{(3)}.$$

При выполнении условий для естественного репера

$$[dx_1 \equiv 0],\ dx_2 = dX^{(2)},\ dx_3 = dX^{(3)},$$

матрица относительного поворота имеет вид

$$h_{k(A)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

нетрудно проверить выполнение нормировки (3-3).

Простейшая схема построения самих векторов естественного репера такова. В некоторой «экваториальной» точке с координатами $\{\alpha = 0,\ \beta = 0\}$ определяется начало исходного (постоянного) репера $\mathbf{q}_{\tilde{k}}$ так, чтобы $\mathbf{q}_{\tilde{1}}$ был нормален поверхности, $\mathbf{q}_{\tilde{2}}$ был касателен линии $\{R + r = const,\ \beta = 0\}$, а $\mathbf{q}_{\tilde{3}}$ был касателен линии $\{r = const,\ \alpha = 0\}$. Тогда векторы естественного репера строятся из исходных двумя последовательными простыми вращениями, например, в следующем порядке

$$\mathbf{q}(\alpha, \beta) = R_2^{\beta} R_3^{\alpha} \tilde{\mathbf{q}},$$

или в явном виде

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta e^{-i\alpha} \\ \cos\beta e^{i\alpha} & \sin\beta \end{pmatrix},\ \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\alpha} \\ ie^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta e^{-i\alpha} \\ \sin\beta e^{i\alpha} & -\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Параметры этого репера совпадают с координатами многообразия, так что $\partial_A \Phi_\xi = \delta_{\xi A}$, вектор $\mathbf{q}_1$ всегда нормален поверхности тора, а векторы $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ всегда остаются касательными линиям координатной сетки. Вдоль направляющих векторов репера соответственно изменяются декартовы координаты

$$dx_1 = 0,\quad dx_2 = (R + r\cos\beta)d\alpha,\quad dx_3 = rd\beta\,.$$

Матрица поворота в голономном базисе имеет вид

$$h_{kA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & R + r\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Вполне аналогична процедура построения естественного репера на трехмерном многообразии, например, на непрерывном множестве концентрических сфер.

Следует подчеркнуть, что для многообразий с косоугольными координатными сетками построение естественного репера (Q-базиса) невозможно в силу врожденной взаимной ортогональности векторных кватернионных единиц.

3. «Поляризованное» пространство-время.

Пусть задано некоторое четырехмерное, возможно, искривленное псевдоевклидово пространство U_4 (пространство-время), касательным к которому в каждой точке $M \leftrightarrow \{y^{\mu}\}$ является пространство Минковского T_4

$$dX^{(\lambda)} = g_{\mu}^{(\lambda)} dy^{\mu};$$

коэффициенты Ламе $g_{\mu}^{(\lambda)}(y)$ иногда называют тетрадой. В выбранном по некоторой методике физическом подпространстве можно разместить трехмерный репер так, что – в общем случае – его поворот зависит от точки многообразия; при этом матрицы поворота имеют вид

$$h_{k(\mu)}(y) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & R_{mn}(y) & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

В частности, матрица поворота может описывать простое вращение, например, вокруг $\mathbf{q}_3$ с некоторой угловой скоростью ω

$$R_{mn} \to R_3^{\omega t},$$

тогда в каждой точке пространства определяется собственная вращательная степень свободы. Будучи измеренной в единицах постоянной Планка, эта дополнительная характеристика может трактоваться как собственный момент импульса (классический спин) физической субстанции, определяющей геометрические свойства пространства-времени. Представляется, что эта несложная модель кватернионно поляризованного мира дополняет список вариантов учета поляризационных свойств вещества в классической теории гравитации: жидкости Вайсенхоффа-Раабе [48], вращающейся тетрады Рэя-Смолли [49], использования пространств аффинной связности с кручением [50] – [53], пространств с несимметричной метрикой [26], [27], [54].

Проблема влияния кватернионной поляризации на геометрию пространства-времени будет обсуждена в Гл. 6, параграф 6.2 «Гравитационные поля в Q-пространствах».

3.2.ТРЕХМЕРНОЕ Q-ПРОСТРАНСТВО[4]

До сих пор объединение базового и касательного пространств обсуждалось с достаточно общих позиций, без детализации характеристик базовых пространств: их топологических особенностей, вида метрики, свойств связности, наличия у них кривизны, и т.п. Ниже предлагается исследование одного из специальных видов базового пространства.

Собственно кватернионное пространство

В особом случае объединения $U \oplus T(U, \mathbf{q})$ базовое пространство является трехмерным: $U = \mathbf{U}_3$. Более того, пусть кватернионная специфика геометрии касательной части этого объединения является отражением свойств самого базового пространства. Иными словами, пусть метрические свойства $\mathbf{U}_3$ таковы, что описание декартовых реперов в касательном ему пространстве с неизбежностью требуют привлечения кватернионной

[4] Оригинальные результаты, содержащиеся в этом параграфе, опубликованы в работах [106], [107].

триады $\mathbf{q}_k$. Такое трехмерное пространство, генерирующее в каждой своей точке множество касательных кватернионных реперов, резонно назвать собственно Q-пространством (или просто Q-пространством).

Обычное трехмерное евклидово пространство не является собственно Q-пространством, хотя к нему можно искусственно достроить в качестве касательного пространство $T(\mathbf{U}_3,\mathbf{q})$. В этом случае речь идет о двух различных пространствах – евклидовом и кватернионном.

Собственно Q-пространство $\mathbf{U}_3$ – это трехмерное пространство, имеющее структуру локально тождественную структуре пространства $T(\mathbf{U}_3,\mathbf{q})$, следовательно, неперестановочную по умножению векторов кватернионную геометрию. Таким образом, Q-пространство оказывается тесно связанным со своим касательным пространством.

Описание Q-пространства полно, если известны все его характеристики, в том числе ориентация Q-триады, задаваемая, вообще говоря, тремя комплексными параметрами. Этим свойством Q-пространство также отличается от обычного трехмерного, пусть неплоского, пространства, для которого, как известно, реперные векторы в касательном пространстве определяются с точностью до поворотов.[5] В Q-пространстве «лишних» функций нет: метрика имеет три независимые компоненты (вообще говоря, комплексные) – ровно столько, сколько независимых функций содержит Q-триада.

Можно предложить следующие две иллюстрации понятия Q-пространства.

1. Кватернионный способ задания координатных линий.

Если линии заданы как огибающие репера, построенного из полярных векторов (обычная триада), то пространство не кватернионное. Задание координатной сетки посредством кватернионного репера «делает» пространство кватернионным. Однако, произвол выбора типа репера – кажущийся. Описание линий с помощью Q-базиса (триады аксиальных векторов) предполагает наличие внутренней структуры точек, составляющих эти линии. Наоборот, использование репера с полярными векторами (обычная триада) исключает скрытые степени свободы в точках пространства. Поэтому описание координатной сетки триадами различного типа, вообще говоря, неэквивалентно и должно выражать не произвол наблюдателя, а физическую сущность пространства.

Пример: кватернионный репер, генерирующий линии сферической системы координат (рис.3-3)

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} \cos\beta & e^{-i\alpha}\sin\beta \\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} -\sin\beta & e^{-i\alpha}\cos\beta \\ e^{i\alpha}\cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\alpha} \\ ie^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

где α – азимутальный угол, β – полярный[6] угол. Вектор $\mathbf{q}_3$, не зависящий от полярного угла, очевидно касателен параллели; из дифференциальных соотношений $\partial_\beta \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$,

[5] Такая же ситуация имеет место, например, в общей теории относительности, где метрический тензор имеет десять компонент, а коэффициенты Ламе, «поднимающие» описание искривленного пространства-времени на уровень соответствующего касательного пространства, – шестнадцать компонент; «лишние» шесть функций дают свободу лоренцевых вращений.

[6] Этот репер касателен к координатным линиям $x_{\tilde{1}} = r\cos\alpha\sin\beta$, $x_{\tilde{2}} = r\sin\alpha\sin\beta$, $x_{\tilde{3}} = r\cos\beta$; он является репером Френе-Серре для радиальных линий и дуг большого круга (меридианов и экватора), но не является таковым для параллелей.

$\partial_\beta \mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_1$ легко определяется, что $\mathbf{q}_1$ направлен вдоль радиальной линий, $\mathbf{q}_2$ – вдоль меридиана. Трехмерное пространство, с такой координатной сеткой является кватернионным: каждая его точка имеет структуру в силу описания линий с помощью Q-базиса.

2. Q-базис «вморожен» в точки мноообразия.

В таком пространстве каждая точка априори имеет внутреннюю структуру, описываемую или кватернионной триадой, или матрицами SO(3), или матрицами SL(2,C); но наблюдатель может «работать» в нем с обычной координатной сеткой. Эта ситуация, хотя и противоположна по существу, но формально сходна с рассмотренной в предыдущем параграфе моделью касательного Q-пространства: описание геометрической картины становится достаточным при установлении связи (с помощью матриц локального поворота) между триадой, генерирующей координатные линии, и репером, «вмороженным» в точки Q-пространства.

Пример. Декартова система координат (y^1, y^2, y^3) используется для нумерации точек в Q-пространстве с линейно-цилиндрической поляризацией: Q-базис в каждой точке повернут на угол, равный координате y^3 (рис.3-4)

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & e^{-iy^3} \\ e^{iy^3} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-iy^3} \\ ie^{iy^3} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицей поворота евклидовой триады $\mathbf{e}_a$, касательной линиям координатной сетки, до совпадения ее осей с осями локального кватернионного репера $\mathbf{q}_k$ очевидно является матрица простого вращения $R_3^{y^3}$. Тогда из инвариантности Q-вектора-дифференциала $\mathbf{dx} \equiv dx_k \mathbf{q}_k$ определяется матрица связи между локальными и глобальными координатами

$$dx_k = h_{ka} dy^a \quad \Rightarrow \quad h_{ka}(y) = \begin{pmatrix} \cos y^3 & \sin y^3 & 0 \\ -\sin y^3 & \cos y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример простейшего Q-пространства – трехмерное касательное пространство $T(U, \mathbf{q})$ для произвольного базового пространства U (которое может иметь структуру и кватернионного пространства).

Кватернионная метрика

Различие некватернионного (например, евклидова или риманова) и кватернионного пространств наиболее очевидно проявляется в форме метрики.

Метрику пространства с определенными в нем векторами ортонормированного репера можно определить как скалярное умножение этих векторов. Например, в евклидовом пространстве (совпадающем со своим евклидовым же касательным пространством) такая метрика симметрична

$$g_{kn} \equiv \mathbf{e}_k \mathbf{e}_n = \delta_{kn} .$$

По аналогии можно ввести кватернионный «метрический тензор» (Q-метрику) Q-пространства. В компонентах репера Q–метрика оказывается ни чем иным как правилом умножения кватернионных «мнимых» единиц

$$\mathbf{g}_{kn} \equiv \mathbf{q}_k \mathbf{q}_n = -\delta_{kn} + \varepsilon_{knj} \mathbf{q}_j .$$

Эта метрика обладает свойством, характерным для всех метрик: свертка двух Q-метрик (правда, здесь специальная свертка: или по первым, или по последним индексам) имеет своим результатом вновь Q-метрику. Например, свертка по первым индексам:

$$\mathbf{g}_{kn}\mathbf{g}_{km} = (-\delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j)(-\delta_{km} + \varepsilon_{kml}\mathbf{q}_l) \equiv -\delta_{nm} + \varepsilon_{nmj}\mathbf{q}_j = \mathbf{g}_{nm}.$$

Однако, в отличие от метрик риманова пространства Q-метрика имеет весьма специфические свойства: она асимметрична и является многокомпонентным кватернионом (в частности, тензором-матрицей).

Симметричная – скалярная – часть Q-метрики с точностью до знака (что формально не существенно) представляет собой произведение декартовой плоской метрики трехмерного пространства и единичной 2×2-матрицы (в простейшем случае). Эта часть, как и в некватернионной (например, римановой) геометрии, выполняет прямые метрические функции: с ее помощью определяются нормы и произведения классических геометрических объектов (векторов, тензоров и пр).

Антисимметричная часть содержит в качестве множителя матрицу-вектор с нулевым следом, поэтому симметричную часть – обычную классическую метрику, – как в квантовой теории, можно получить вычислением следа Q-метрики

$$\delta_{kn} = -\frac{1}{2} Tr\mathbf{g}_{kn}.$$

Последнее обстоятельство, в частности, не исключает следующую интерпретацию. Реальное трехмерное пространство по своей сути может являться Q-пространством, но на уровне наблюдений с использованием классических методов его специфические кватернионные свойства остаются незамеченными. Однако, антисимметричная часть Q-метрики, ориентированная на «взаимодействие» с матричными и спинорными величинами, может влиять на результаты подсчета неклассических физико-геометрических величин. Ниже будет показано, что, например, вычисление с помощью Q-метрики гамильтониана для заряженной квантово-механической частицы во внешнем магнитном поле автоматически приводит к появлению в гамильтониане спинового слагаемого Паули.

Несмотря на свою необычность, Q-метрика возникает из алгебры кватернионов весьма естественным образом. Это выгодно отличает ее от ранних аналогов: асимметричного метрического тензора четырехмерного пространства Эйнштейна [26] и содержащих антисимметричные слагаемые метрик Моффата [27] и Соленга [54], предложенных авторами из эвристических соображений в попытке построить геометризованную схему объединения различных физических полей.