3.1.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СТРУКТУРА Q-ПРОСТРАНСТВ[15]

В общем случае Q-пространство может быть неплоским и тогда описание его точек осуществляется с помощью криволинейных координат y^a, связанных с приращениями координат x_k в касательном $T(\mathbf{U}_3, \mathbf{q})$ коэффициентами Ламе[16]

$$dx_k = g_{ka} dy^a . \tag{3-6}$$

Здесь, поскольку оба пространства трехмерны, голономные координаты базового пространства нумеруются первыми строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, координаты в касательном пространстве – буквами из середины алфавита: k, l, m. Вообще говоря, координаты x_k неголономны, а их приращения (3-6) являются базисными 1-формами в касательном пространстве

$$\theta_k \equiv g_{ka} dy^a ,$$

их удобно использовать для изучения свойств Q-пространства (рис. 3-5).

Изучение дифференциальных свойств Q-пространства целесообразно осуществить в два этапа, точнее, на двух уровнях.

«Внутренний» анализ аффинных свойств Q-пространства

Первый уровень – «внутри базы»: изучение свойств $\mathbf{U}_3$ как обычного дифференцируемого многообразия, вектор-кватернионные свойства которого пока «не замечаются». В этом случае осуществляется стандартная процедура, хорошо известная из многих фундаментальных работ (например, [44], [45], [40], [55]). Для целостности картины полезно кратко описать эту стандартную схему.

1. <u>Параллельный перенос вектора</u>.

В криволинейной сетке $\mathbf{U}_3$ определяется перенос произвольного вектора A^a вдоль малой дуги некоторой кривой $y^a(u)$: $A^a(u) \to A^a(u + du)$. Результат переноса существенным образом может зависеть не только от изменений компонент самого вектора как функций точки, но также и от геометрических свойств пространства $\mathbf{U}_3$ (в частности, от выбора его метрики) (рис. 3-6). Для описания таких «геометрических» изменений δA^a вводятся коэффициенты связности Γ^a_{bc}: $\delta A^a \equiv -A^c \Gamma^a_{bc} dy^b$. Разность между полным численным изменением компонент вектора dA^a при таком переносе и изменением, зависящим от геометрии пространства δA^a, называют абсолютным, или ковариантным, дифференциалом

$$DA^a \equiv dA^a - \delta A^a = dA^a + A^c \Gamma^a_{bc} dy^b , \tag{3-7}$$

а соответствующую производную – ковариантной производной.[17]

Для геометрического анализа существенным является понятие автопараллельной линии. Если для некоторой линии $y^a(u)$ ее касательный вектор

$$U^a \equiv \frac{dy^a}{du} ,$$

---

[15] Оригинальные результаты этого параграфа опубликованы в работах [107], [108].

[16] Собственно Q-пространства не содержат обычных (полярных) векторов, поэтому нет необходимости вводить дополнительные повороты h^a_k.

[17] Несложно проверить, что для вектора в ковариантных компонентах $DA_a = dA_a - A_c \Gamma^c_{ba} dy^b$.

постоянен относительно ковариантной производной с заданной связностью

$$\frac{dU^a}{du} + \Gamma^a_{bc} U^c U^b = 0 ,$$

то такая линия называется автопараллельной (говорят также – геодезической). Перенос произвольного вектора вдоль геодезической линии в искривленном пространстве обобщает параллельный перенос вектора вдоль прямой линии в плоском пространстве

$$d_p A^a = -A^c \Gamma^a_{bc} U^b du , \qquad (3\text{-}8)$$

при этом из (3-7) сразу следует

$$D^u A^a = 0 . \qquad (3\text{-}9)$$

Несложно убедиться в том, что условие параллельного переноса (3-8) гарантирует сохранение модуля вектора, а также угла наклона этого вектора к касательной линии, в каждой точке геодезической.

2. Аффинная[18] связность.

В наиболее общем случае аффинная связность Γ^a_{bc} представляет собой сумму символов Кристоффеля (риманова связность), тензора торсионной деформации и тензора неметричности[19]

$$\Gamma^a_{bc} = \widetilde{\Gamma}^a_{bc} + Q_{bc\cdot}^{\ \ a} + S^a_{bc} \ . \qquad (3\text{-}10)$$

Символы Кристоффеля и неметричность: первый (нетензорный) и последний (тензорный) геометрические объекты, оба симметричные по нижним индексам, могут быть выражены в виде соответственно частных и ковариантных производных обычного метрического тензора (симметричной скалярной части Q-метрики) $g_{ab} = -g_{ka} g_{nb} \frac{1}{2} Tr\, \mathbf{g}_{kn}$:

$$\widetilde{\Gamma}^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) ,$$

$$S^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (\nabla_b g_{cd} + \nabla_c g_{bd} - \nabla_d g_{bc}) .$$

3. Картаново кручение.

Антисимметричная по нижним индексам часть связности есть тензор картанова кручения (*C*-кручение) $C^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}$; отличие от нуля этого тензора может геометрически интерпретироваться как дефект правила векторного параллелограмма. Действительно, осуществляя внутри $\mathbf{U}_3$ параллельный перенос малого вектора dz^a вдоль другого малого вектора dw^a

[18] От лат. «affinis» – «родственный».

[19] Тензор неметричности S^a_{bc} еще называют тензором сегментарной кривизны, т.к., будучи отличным от нуля, он приводит к локальному искривлению автопараллельных линий. Для пространств без кручения в малой окрестности точки в декартовых координатах уравнение автопараллельной принимает вид $\frac{d^2 y^a}{du^2} = -S^a_{bc} \frac{dy^c}{du} \frac{dy^b}{du}$. Простой пример для двумерной плоскости: $y^1 = x$, $y^2 = y$, $-S^1_{11} = |\varepsilon| << 1$, $S^2_{22} = 0$; решение уравнения геодезической: $y(x) = A\varepsilon(x - x_0)^2 + B(x - x_0) + y_0$, где A, B, x_0, y_0 – константы интегрирования; локально прямую линию сегментарная кривизна превращает в «медленную параболу».

$$d^{w}{}_{P} dz^{a} = -\Gamma^{a}_{bc} dz^{c} dw^{b} ,$$

а затем наоборот – параллельный перенос dw^a вдоль dz^a

$$d^{z}{}_{P} du^{a} = -\Gamma^{a}_{bc} dw^{c} dz^{b}$$

и вычисляя разность, в пространстве с кручением вместо ожидаемого нуля имеет место дефект замыкания параллелограмма, имеющего рассматриваемые малые векторы сторонами

$$d^{w}{}_{P} dz^{a} - d^{z}{}_{P} du^{a} = C^{a}_{bc} dz^{b} dw^{c} .$$

Если неметричность равна нулю $S^{a}_{bc} = 0$, то есть если обычная метрика постоянна относительно ковариантной производной с аффинной связностью, то тензор торсионной деформации антисимметричен в последних индексах и может быть выражен как алгебраическая комбинация компонент тензора кручения

$$Q_{bca} = \frac{1}{2}(C_{abc} + C_{cab} - C_{bca}) .$$

Этих сведений о *С*-кручении пока достаточно.

4. Аффинная кривизна.

Следующий шаг «внутреннего анализа» – вычисление дефекта переноса вектора A_a по замкнутому контуру: по сторонам параллелограмма, составленного малыми дугами линий с параметрами *u* и *v*

$$(D^{v} D^{u} - D^{u} D^{v}) A^{a} = A^{b}\ {}^{\Gamma}R^{a}{}_{\cdot bcd}\ d^{u} y^{c}\ d^{v} y^{d} .$$

Здесь коэффициентом пропорциональности дефекта является легко вычисляемый по правилу (3-7) тензор кривизны пространства аффинной связности

$${}^{\Gamma}R^{a}_{\cdot bcd} \equiv \partial_{c}\Gamma^{a}_{db} - \partial_{d}\Gamma^{a}_{cb} + \Gamma^{a}_{ce}\Gamma^{e}_{db} - \Gamma^{a}_{de}\Gamma^{e}_{cb} . \qquad (3\text{-}11)$$

Вообще говоря, связность состоит из трех слагаемых. Но если временно предположить, что связность состоит всего из двух частей, например, $\Gamma^{a}_{bc} = \widetilde{\Gamma}^{a}_{bc} + \widetilde{Q}_{bc\cdot}{}^{a}$ (т.е. торсионная деформация и неметричность объединены в один объект), то выражение для кривизны записывается как сумма 12 «слагаемых»

$${}^{\Gamma}R^{a}_{\cdot bcd} \equiv \partial_{c}\widetilde{\Gamma}^{a}_{db} - \partial_{d}\widetilde{\Gamma}^{a}_{cb} + \widetilde{\Gamma}^{a}_{ce}\widetilde{\Gamma}^{e}_{db} - \widetilde{\Gamma}^{a}_{de}\widetilde{\Gamma}^{e}_{cb} + \partial_{c}\widetilde{Q}^{a}_{db} - \partial_{d}\widetilde{Q}^{a}_{cb} + \widetilde{Q}^{a}_{ce}\widetilde{Q}^{e}_{db} - \widetilde{Q}^{a}_{de}\widetilde{Q}^{e}_{cb} +$$
$$+ \widetilde{Q}^{a}_{ce}\widetilde{\Gamma}^{e}_{db} + \widetilde{\Gamma}^{a}_{ce}\widetilde{Q}^{e}_{db} - \widetilde{Q}^{a}_{de}\widetilde{\Gamma}^{e}_{cb} - \widetilde{\Gamma}^{a}_{de}\widetilde{Q}^{e}_{cb} .$$

Первые четыре члена последнего выражения являют собой определение построенного из символов Кристоффеля тензора римановой кривизны $\widetilde{R}^{a}_{\cdot bcd}$. Остальные «слагаемые» также образуют кривизну «кручения и неметричности», причем частные производные от тензора $\widetilde{Q}_{bc\cdot}{}^{a}$ в совокупности с последними четырьмя членами группируются в ковариантные производные относительно римановой связности

$$\breve{\widetilde{R}}{}^{a}_{\cdot bcd} \equiv \widetilde{\nabla}_{c}\widetilde{Q}^{a}_{db} - \widetilde{\nabla}_{d}\widetilde{Q}^{a}_{cb} + \widetilde{Q}^{a}_{ce}\widetilde{Q}^{e}_{db} - \widetilde{Q}^{a}_{de}\widetilde{Q}^{e}_{cb} ,$$

(для любого вектора $\widetilde{\nabla}_{b} A^{a} \equiv \partial_{b} A^{a} + A^{c}\widetilde{\Gamma}^{a}_{bc}$), так что разложение связности на два слагаемых имеет своим следствием разложение кривизны также на два слагаемых, каждое их которых имеет понятный геометрический смысл

$${}^{\Gamma}R^{a}_{\cdot bcd} = \widetilde{R}^{a}_{\cdot bcd} + \breve{\widetilde{R}}{}^{a}_{\cdot bcd} .$$

Однако тензор кривизны имеет столь замечательную структуру, что разложение связности на большее число слагаемых приводит к представлению кривизны в виде такого же числа слагаемых, и каждое из них также есть тензор кривизны определенной природы. Примером может служить подстановка полного разложения связности (3-10) в выражение (3-11); при этом тензор кривизны может быть представлен в виде суммы трех слагаемых

$$^{\Gamma}R^{a}_{\cdot bcd} = \tilde{R}^{a}_{\cdot bcd} + \bar{R}^{a}_{\cdot bcd} + \breve{R}^{a}_{\cdot bcd}\,. \tag{3-12}$$

Первое слагаемое $\tilde{R}^{a}_{\cdot bcd}$ – тензор римановой кривизны, построенный по правилу (3-11) из символов Кристофеля. Второе слагаемое можно назвать тензором картановой торсионной кривизны

$$\bar{R}^{a}_{\cdot bcd} \equiv \tilde{\nabla}_c Q^{a}_{db} - \tilde{\nabla}_d Q^{a}_{cb} + Q^{a}_{ce}Q^{e}_{db} - Q^{a}_{de}Q^{e}_{cb}\,,$$

поскольку он сконструирован из торсионной части связности по правилу, аналогичному (3-11), но с использованием не частной, а ковариантной производной относительно символов Кристоффеля. Наконец, третье слагаемое – кривизна неметричности

$$\breve{R}^{a}_{\cdot bcd} \equiv \bar{\nabla}_c S^{a}_{db} - \bar{\nabla}_d S^{a}_{cb} + S^{a}_{ce}S^{e}_{db} - S^{a}_{de}S^{e}_{cb}\,,$$

построенная из компонент тензора сегментарной кривизны с использованием ковариантных производных относительно связности, представляющей собой сумму символов Кристоффеля и торсионной части [т.е. $\bar{\nabla}_b A^a \equiv \partial_b A^a + A^c(\tilde{\Gamma}^{a}_{bc} + Q^{a}_{bc})$].

Следует заметить, что представление тензора кривизны в виде (3-12) не является единственно возможным. Вот пример другого разложения:

$$^{\Gamma}R^{a}_{\cdot bcd} = \tilde{R}^{a}_{\cdot bcd} + \hat{R}^{a}_{\cdot bcd} + \hat{\bar{R}}^{a}_{\cdot bcd}\,. \tag{3-13}$$

где в качестве первого слагаемого традиционно выделена риманова кривизна, тогда как второе слагаемое – кривизна неметричности (с ковариантными производными относительно символов Кристоффеля)

$$\hat{R}^{a}_{\cdot bcd} \equiv \tilde{\nabla}_c S^{a}_{db} - \tilde{\nabla}_d S^{a}_{cb} + S^{a}_{ce}S^{e}_{db} - S^{a}_{de}S^{e}_{cb}\,,$$

а третье слагаемое – картанова торсионная кривизна, определенная с помощью ковариантных производных, содержащих сумму символов Кристоффеля и неметричности

$$\hat{\bar{R}}^{a}_{\cdot bcd} \equiv \hat{\nabla}_c Q^{a}_{db} - \hat{\nabla}_d Q^{a}_{cb} + Q^{a}_{ce}Q^{e}_{db} - Q^{a}_{de}Q^{e}_{cb}\,,$$

[т.е. $\hat{\nabla}_b A^a \equiv \partial_b A^a + A^c(\tilde{\Gamma}^{a}_{bc} + S^{a}_{bc})$]. Перебирая разные комбинации частей связности (3-10), можно найти и другие представления тензора кривизны.

«Внешний» анализ свойств Q-пространства

Второй уровень изучения дифференциальных свойств Q-пространства – «внешний» анализ с позиций плоского касательного пространства $T(\mathbf{U}_3,\mathbf{q})$, в котором, собственно, и определяются векторы, ассоциированные с точками $\mathbf{U}_3$.[20] В дальнейшем пространство, локально касательное Q-пространству $\mathbf{U}_3$ будет обозначаться просто $\mathbf{Q}_3$ [т.е. $\mathbf{Q_3} = T(\mathbf{U}_3,\mathbf{q})$].

В каждой точке M, общей для Q-пространства $\mathbf{U}_3$ и касательного к нему пространства $\mathbf{Q}_3$, непременно находится начало некоторой кватернионной триады $\mathbf{q}_k(M)$, инициирующей

[20] Характерная цитата из книги В.Родичева [40]: «… на искривленной поверхности нельзя построить вектор («кривых» векторов не бывает), однако с каждой точкой поверхности можно связать сколько угодно векторов, но все они будут лежать в касательной плоскости…»

систему неголономных координат x_j. Учет этого обстоятельства дополнительно к тому, что уже известно о дифференциальной структуре $\mathbf{U}_3$, осуществляется на стадии определения параллельного переноса произвольного вектора B_n в пространстве $\mathbf{Q}_3$

$$d_p B_n = -\Omega_{jkn} B_k \, dx_j \, .$$

Здесь аффинная связность $\mathbf{Q}_3$

$$\Omega_{jkn} = \Phi_{jkn} + \omega_{jkn} + \sigma_{jkn} \qquad (3\text{-}14)$$

включает обычные коэффициенты вращения Риччи

$$\Phi_{jkn} = g_n^a \nabla_j g_{ka} \, ,$$

отражающие криволинейный характер координатных линий в $\mathbf{U}_3$, собственную кватернионную связность ω_{jkn} и, возможно, произвольное слагаемое σ_{jkn}; все эти геометрические объекты антисимметричны в двух последних индексах. Если теперь для произвольного вектора определить $\mathbf{Q}_3$-ковариантную производную со связностью (3-14)

$$D_j B_n \equiv \partial_j B_n + B_k \Omega_{jkn} \, , \qquad (3\text{-}15)$$

то оказывается, что Q-триада (а значит, и Q-метрика) не постоянны относительно этой производной

$$D_j \mathbf{q}_n = \partial_j \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_k \Omega_{jkn} = \mathbf{q}_k (\Phi_{jkn} + \sigma_{jkn}) \, .$$

В связи с этим сумму частей связности (3-14)

$$\breve{\sigma}_{jkn} \equiv \Phi_{jkn} + \sigma_{jkn}$$

можно рассматривать как кватернионную неметричность, которая в отличие от аффинной неметричности *S*, имеет чисто вращательный характер и вынуждает Q-триаду совершать дополнительный поворот к тому, что обусловлен ее собственной Q-связностью. Например, если триада постоянна (ее параметры не изменяются от точки к точке $\mathbf{U}_3$) и при этом чистая Q-неметричность σ_{jkn} равна нулю, то векторы триады, связанные коэффициентами Ламе с направлениями координатных линий в $\mathbf{U}_3$, тем не менее, осуществляют поворот, вызванный наличием коэффициентов вращения Риччи, которые с точки зрения триады, представляют собой Q-неметрическую «силу».

В дальнейшем для упрощения формул чисто кватернионная неметричность и собственная Q-связность интегрируются в единый геометрический объект: чисто кватернионную связность

$$\breve{\omega}_{jkn} = \omega_{jkn} + \sigma_{jkn}$$

и будут выделяться лишь по необходимости.

Дифференциальные уравнения структуры

Основные дифференциальные характеристики $\mathbf{Q}_3$ можно было бы исследовать, следуя схеме, изложенной для аффинной части $\mathbf{U}_3$. Однако, как уже было упомянуто выше, в касательном пространстве естественным образом определяются дифференциальные формы,[21] так что их использование вместе с методом дифференциальных уравнений структуры Картана, оказывается более привлекательным и, самое главное, компактным.

<u>1. Первое уравнение структуры</u>.

Первое дифференциальное уравнение структуры

$$d\theta_k = -\Omega_{kn} \wedge \theta_n + T_k \qquad (3\text{-}16)$$

[21] Формализм дифференциальных форм и внешних произведений достаточно полно изложен в книгах [56], [57].

формально связывает внешний дифференциал базисной 1-формы $d\theta_k$, 1-форму связности

$$\Omega_{kn} = -\Omega_{jkn}\theta_j$$

и 2-форму кручения

$$T_k = \frac{1}{2}T_{kjn}\theta_j \wedge \theta_n ,$$

где Ω_{jkn} – полная $\mathbf{Q}_3$-связность (3-14), а тензор кручения следует определить. Сравнение явного вида левой части уравнения (3-16)

$$d\theta_k = \partial_b g_{ka} dy^b \wedge dy^a \equiv g^a_n \partial_j g_{ka}\theta_j \wedge \theta_n$$

с записью в развернутой форме его правой части

$$(\Omega_{jkn} + T_k)\theta_j \wedge \theta_n \equiv (-\breve{\omega}_{jkn} + g^a_n \partial_j g_{ka} - \frac{1}{2}C_{jkn} + \frac{1}{2}T_{kjn})\theta_j \wedge \theta_n$$

приводит к следующему выражению для тензора кручения

$$T_{kjn} \equiv C_{jkn} + 2\breve{\omega}_{[jk]n} .$$

Это означает, что полное кручение Q-пространства включает «внутреннее» *C*-кручение и дополнительное слагаемое – часть кватернионной связности, антисимметричную по первым индексам. Этот последний объект, конечно, тоже может расцениваться как дополнительный дефект замыкания векторного параллелограмма, возникающий в результате чисто кватернионных поворотов Q-триады. Представляется целесообразным назвать этот геометрический объект тензором гамильтонова кручения (*H*-кручением)

$$H_{kjn} \equiv \breve{\omega}_{jkn} - \breve{\omega}_{kjn} . \qquad (3\text{-}17)$$

Из определения (3-17) следует, что в противоположность картанову кручению, вводимому в геометрию аффинного пространства не зависимо от обычной метрической связности (символов Кристоффеля) и аффинной неметричности, *H*-кручение является зависимым и от Q-метрической (собственной) связности, и от Q-неметричности. По сути, *H*-кручение и чистая Q-связность алгебраически эквивалентны, поскольку могут быть выражены друг через друга линейными комбинациями (3-17), а также

$$\breve{\omega}_{nkj} = \frac{1}{2}(H_{kjn} + H_{nkj} + H_{jkn}) . \qquad (3\text{-}18)$$

Это свойство, общее в касательном пространстве торсионных тензоров любой природы, свидетельствует о том, что *H*-кручение в Q-пространстве не является свободным геометрическим объектом.[22]

<u>2. Второе уравнение структуры</u>.

Второе уравнение структуры, по существу, представляет собой определение 2-формы полной кривизны

---

[22] В частности, объект неголономности $N_{jkn} \equiv g^a_j g^b_k (\partial_a g_{nb} - \partial_b g_{na})$ алгебраически эквивалентен коэффициентам вращения Риччи для метрических пространств без кручения, т.к. связан с ними соотношениями типа (3-17), (3-18) (см., например, [40]). Он также имеет смысл кручения, но – весьма специальной природы, поскольку зависит исключительно от свойств коэффициентов Ламе. Так, для евклидова пространства без картанова кручения, но в криволинейных, например, сферических координатах объект неголономности отличен от нуля, и в касательном пространстве векторный параллелограмм не замыкается. Такой, так сказать, «кинематический» эффект не следует смешивать с наличием «настоящего» кручения – картанова или кватернионного.

$$R_{km} = \frac{1}{2} R_{kmij} \theta_i \wedge \theta_j = d\Omega_{km} + \Omega_{kn} \wedge \Omega_{nm}, \qquad (3\text{-}19)$$

определяющий тензор которой есть

$$R_{kmij} = \partial_i \Omega_{jkm} - \partial_j \Omega_{ikm} + \Omega_{jkn}\Omega_{inm} - \Omega_{ikn}\Omega_{jnm}. \qquad (3\text{-}20)$$

Так же как аффинная кривизна в компонентах криволинейных координат, полная кривизна в компонентах триады допускает представление в виде суммы кривизн различной природы при разложении связности на слагаемые. Впрочем, это обстоятельство уже не вызывает удивления, поскольку хорошо известно [40], что анализ дифференциальной геометрии базового многообразия из касательного пространства адекватен анализу в голономных координатах.

Итак, поскольку $\Omega_{jkn} = \Phi_{jkn} + \breve{\omega}_{jkn}$, полная $\mathbf{Q}_3$-кривизна (3-20) представляется в виде

$$R_{kmij} = \partial_i \Phi_{jkm} - \partial_j \Phi_{ikm} + \Phi_{jkn}\Phi_{inm} - \Phi_{ikn}\Phi_{jnm} + \partial_i \breve{\omega}_{jkm} - \partial_j \breve{\omega}_{ikm} +$$
$$+ \breve{\omega}_{jkn}\breve{\omega}_{inm} - \breve{\omega}_{ikn}\breve{\omega}_{jnm} + \Phi_{jkn}\breve{\omega}_{inm} - \Phi_{ikn}\breve{\omega}_{jnm} + \breve{\omega}_{jkn}\Phi_{inm} - \breve{\omega}_{ikn}\Phi_{jnm},$$

где первые четыре члена в точности составляют аффинный тензор кривизны, записанный в компонентах триады[23]

$${}^{\Phi}R_{kmij} \equiv g_{ka} g_m^b g_i^c g_j^d \; {}^{\Gamma}R^a_{\cdot bcd} = \partial_i \Phi_{jkm} - \partial_j \Phi_{ikm} + \Phi_{jkn}\Phi_{inm} - \Phi_{ikn}\Phi_{jnm}, \qquad (3\text{-}21)$$

тогда как остальные восемь членов группируются в тензор кривизны, построенный из чисто кватернионной связности

$${}^{\bar{Q}}R_{kmij} = D_i \breve{\omega}_{jkm} - D_j \breve{\omega}_{ikm} + \breve{\omega}_{jkn}\breve{\omega}_{inm} - \breve{\omega}_{ikn}\breve{\omega}_{jnm},$$

но с ковариантными производными относительно коэффициентов вращения Риччи

$$D_i \breve{\omega}_{jkm} = \partial_j \breve{\omega}_{ikm} + \breve{\omega}_{jnm}\Phi_{ink} + \breve{\omega}_{ikn}\Phi_{jnm}.$$

Таким образом, полная Q-кривизна есть сумма «старой» аффинной кривизны и нового объекта, имеющего смысл кривизны, возникающего исключительно благодаря кватернионным свойствам пространства

$$R_{kmij} = {}^{\Phi}R_{kmij} + {}^{\bar{Q}}R_{kmij}. \qquad (3\text{-}22)$$

Как и аффинная кривизна, тензор полной кривизны может быть различным образом представлен в виде суммы составляющих. Для дальнейшего анализа весьма полезно в выражении (3-22) выделить кватернионную часть, не зависящую от «обычной» аффинной связности. Для этого достаточно определить ковариантную производную относительно чисто кватернионной связности

$$\breve{D}_i \Phi_{jkm} = \partial_j \Phi_{ikm} + \Phi_{jnm}\breve{\omega}_{ink} + \Phi_{ikn}\breve{\omega}_{jnm};$$

тогда тензор полной кривизны переписывается в виде

$$R_{kmij} = {}^{\bar{\Phi}}R_{kmij} + {}^{Q}R_{kmij},$$

где первое слагаемое – кривизна, сформированная из связности Риччи с ковариантными производными относительно чистой Q-связности

$${}^{\bar{\Phi}}R_{kmij} = \breve{D}_i \Phi_{jkm} - \breve{D}_j \Phi_{ikm} + \Phi_{jkn}\Phi_{inm} - \Phi_{ikn}\Phi_{jnm}, \qquad (3\text{-}23)$$

[23] Для обозначения индексов производных здесь и везде далее в этой главе используются следующие обозначения: $\partial_i \Phi_{jkm} \equiv g_j^a g_i^b \partial_a \Phi_{bkm}$ $D_i \breve{\omega}_{jkm} \equiv g_j^a g_i^b D_a \breve{\omega}_{bkm}$

а второе слагаемое есть чисто кватернионная кривизна

$$ {}^{Q}R_{kmij} = \partial_i \breve{\omega}_{jkm} - \partial_j \breve{\omega}_{ikm} + \breve{\omega}_{jkn}\breve{\omega}_{inm} - \breve{\omega}_{ikn}\breve{\omega}_{jnm} . $$

В свою очередь последнее слагаемое может быть представлено в виде суммы

$$ {}^{Q}R_{kmij} = {}^{Q}\widetilde{R}_{kmij} + {}^{Q}\breve{R}_{kmij} , $$

где первое слагаемое – чисто кватернионная метрическая кривизна

$$ {}^{Q}\widetilde{R}_{kmij} = \partial_i \omega_{jkm} - \partial_j \omega_{ikm} + \omega_{jkn}\omega_{inm} - \omega_{ikn}\omega_{jnm} , \tag{3-24} $$

а второе слагаемое – чисто кватернионная неметрическая кривизна

$$ {}^{Q}\breve{R}_{kmij} = \widetilde{D}_i \sigma_{jkm} - \widetilde{D}_j \sigma_{ikm} + \sigma_{jkn}\sigma_{inm} - \sigma_{ikn}\sigma_{jnm} , $$

содержащая ковариантные производные относительно метрической части Q-связности

$$ \widetilde{D}_i \sigma_{jkm} = \partial_j \sigma_{ikm} + \sigma_{jnm}\omega_{ink} + \sigma_{ikn}\omega_{jnm} . $$

Теперь необходимо отметить важный факт. Результат альтернирования двух частных производных вектора Q-триады, с одной стороны, есть тождественный ноль, но с другой – приводит к комбинации компонент собственной Q-связности, в точности совпадающей с выражением для кватернионной метрической кривизны (3-24)

$$ (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i)\mathbf{q}_n = (\partial_i \omega_{jnk} - \partial_j \omega_{ikn} + \omega_{jkm}\omega_{imn} - \omega_{inm}\omega_{jmk})\mathbf{q}_k = {}^{Q}\widetilde{R}_{kmij}\mathbf{q}_k = 0 . \tag{3-25} $$

Это означает, что полная кривизна Q-пространства состоит только из Q-неметрических частей, построенных из коэффициентов вращения Риччи и кватернионной неметричности

$$ R_{kmij} = {}^{\bar{\Phi}}R_{kmij} + {}^{Q}\breve{R}_{kmij} . \tag{3-26} $$

Наконец, подстановка в выражении (3-26) структуры тензора ${}^{\bar{\Phi}}R_{kmij}$ представленной уравнениями (3-12), (3-22), (3-23) приводит к окончательному виду полной кривизны Q-пространства как суммы четырех слагаемых

$$ R_{kmij} = {}^{\bar{\Phi}}\widetilde{R}_{kmij} + {}^{\bar{\Phi}}\overline{R}_{kmij} + {}^{\bar{\Phi}}\breve{R}_{kmij} + {}^{Q}\breve{R}_{kmij} , \tag{3-27} $$

где ${}^{\bar{\Phi}}\widetilde{R}_{kmij}$ – «риманова» кривизна, ${}^{\bar{\Phi}}\overline{R}_{kmij}$ – «торсионная» кривизна, ${}^{\bar{\Phi}}\breve{R}_{kmij}$ – кривизна аффинной неметричности, ${}^{Q}\breve{R}_{kmij}$ – кривизна чисто кватернионной неметричности; все содержат ковариантные производные относительно соответствующей связности, включая члены с собственно Q-связностью.

Поскольку свойства симметрии $\mathbf{Q}_3$-связности и коэффициентов вращения Риччи полностью совпадают, тензора полной кватернионной кривизны имеет такие же свойства симметрии, как тензор кривизны обычного пространства аффинной связности (см., например, [45]).

3.2. СХЕМА КЛАССИФИКАЦИИ КВАТЕРНИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ[24]

Наблюдаемое разнообразие дифференциальных характеристик Q-пространств побуждает к построению классификационной пирамиды, аналогичной известной редукционной схеме, наглядно иллюстрирующей иерархию пространств аффинной связности (см., например, обзор [111]). Классификация строится таким образом, что каждому Q-пространству приписывается определенное место в иерархии в зависимости от наличия или отсутствия того или иного тензора кривизны, кручения или неметричности. Один из вариантов такой классификации кратко описан в работе [107].

[24] Содержание этого параграфа опубликовано в работах [107], [109], [110].

Классификация Q-пространств «по неметричности»

Редукционных схем, о которых идет речь, можно построить достаточно много. Представляется, однако, что одним из наиболее естественных вариантов является схема, отправным пунктом которой является наличие или отсутствие наиболее экзотического и заметно «портящего» «хорошую» геометрию объекта – неметричности, как кватернионной, так и аффинной.

Если Q-неметричность отлична от нуля $\sigma \neq 0$, то существует, по крайней мере, 4 типа Q-пространств:

1. Q-пространство общего вида, QS(G)[25]. В таком пространстве отличны от нуля все основные характеристики: чистая Q-неметричность $\sigma \neq 0$, кривизна (и «аффинная», и «кватернионная») $R = {}^{\Phi}R + {}^{Q}\breve{R} \neq 0$ и кручение (и картаново, и гамильтоново) $T = C + H \neq 0$.

2. Q-пространство общего вида без кручения, QS(G\T): $\sigma \neq 0$, $R = {}^{\Phi}R + {}^{Q}\breve{R} \neq 0$, $T = C + H = 0$. Здесь гамильтоново кручение равно по величине и противоположно по знаку картанову кручению; в результате происходит полная торсионная компенсация.

3. Q-пространство общего вида без кривизны, или 1-й тип Вайценбёка, QS(G\R): $\sigma \neq 0$, $R = {}^{\Phi}R + {}^{Q}\breve{R} = 0$, $T = C + H \neq 0$. Здесь кватернионная кривизна («кривизна Q-неметричности) компенсирует «аффинную» кривизну, при этом обе содержат ковариантные производные относительно собственной Q-связности. Такое пространство условно будет называться пространством Вайцнбёка (автопараллельным) 1-ого типа.

4. Плоское Q-пространство общего вида – без кручения и кривизны, QS(G\T\R): $\sigma \neq 0$, $R = {}^{\Phi}R + {}^{Q}\breve{R} = 0$, $T = C + H = 0$. В этом случае кватернионные объекты полностью компенсируют аффинные.

Очевидно, в рамках Q-пространства общего вида можно рассмотреть множество различных случаев наличия или отсутствия «внутренних» аффинных объектов, например, отдельно отсутствие аффинной неметричности или картанова кручения. Такую не слишком продуктивную детализацию при необходимости легко осуществить, здесь же резонно ограничиться более крупными блоками классификации. Поэтому следующий шаг снова касается чисто кватернионной неметричности.

Если чистая Q-неметричность исчезает $\sigma = 0$, то исчезает и построенная из нее кватернионная кривизна ${}^{Q}\breve{R} = 0$, следовательно в наличии имеются лишь полное кручение, аффинная кривизна и собственная Q-связность. Для некоторого упрощения схемы классификации в следующем блоке будут сразу рассматриваться две возможности наличия или отсутствия аффинной неметричности $S \neq 0$, $S = 0$ (в последнем случае в скобках, обозначающих тип пространства, используется символ ‘\S’).

При этих условиях можно различить, по крайней мере, еще 4 типа Q-пространств.

5. Аффинное Q-пространство, QS(G\σ): $\breve{\sigma} = 0$, $R = {}^{\Phi}R \neq 0$, $T = C + H \neq 0$; отличны от нуля лишь аффинная кривизна, содержащая ковариантные производные относительно

[25] Обозначение латинскими буквами удобно; в данном случае это аббревиатура английского эквивалента: Quaternionic Space (General). В дальнейшем в скобках будет указано, какая из дифференциальных характеристик «вычитается» из общего случая. Например, (G\T) означает, что данное пространство свободно от любого кручения. Также для упрощения записи при символах дифференциальных характеристик не будут указываться индексы компонент.

собственной Q-связности, а также полное кручение, в котором гамильтонова часть также строится исключительно из метрической части Q-связности.

6. Аффинное Q-пространство без кручения, QS(G\ σ \T): $\sigma = 0$, $R = {}^{\Phi}R \neq 0$, $T = C + H = 0$. Здесь гамильтоново кручение компенсирует картаново.

7. Аффинное автопараллельное Q-пространство, или 2-й тип Вайценбёка QS(G\ σ \R): $\sigma = 0$, $R = {}^{\Phi}R = 0$, $T = C + H \neq 0$. Аффинные торсионная и неметрическая (если присутствует) части кривизны компенсируют «риманову» кривизну, содержащую также члены с собственной Q-связностью. Такое пространство условно можно отнести ко второму типу автопараллельных пространств Вайценбёка.

8. Аффинное плоское Q-пространство, QS(G\ σ \R\T): $\sigma = 0$, $R = {}^{\Phi}R = 0$, $T = C + H = 0$. Здесь аффинные торсионная и неметрическая (если присутствует) части кривизны компенсируют «риманову» кривизну, а *H*-кручение компенсирует *C*-кручение.

Следующий шаг редукционной схемы – исключение картанова кручения: $C = 0$. При таком условии заслуживают внимания следующие пять типов Q-пространств.

9. «Квазириманово» Q-пространство, QS(G\ σ \S\C): $\sigma = 0$, $S = 0$, $R = {}^{\Phi}\tilde{R} \neq 0$, $T = H \neq 0$. Это пространство являет собой интересный пример «минимальной связи» кватернионных римановых переменных: тензор кривизны содержит ковариантные производные римановой связности относительно собственной Q-метрической связности, алгебраически эквивалентной гамильтонову кручению. Наличие кватернионных параметров может заметно влиять на свойства такого «почти риманова» Q-пространства.

10. «Риманово» Q-пространство, QS(G\ σ \S\C\T): $\sigma = 0$, $S = 0$, $R = {}^{\Phi}\tilde{R} \neq 0$, $T = H = 0$. Гамильтоново кручение (вместе с собственной Q-связностью) исчезает; и если бы метрика была обычным симметричным тензором (а не специфической кватернионной структурой), такое пространство было бы в точности римановым.

11. Автопараллельное Q-пространство 3-его типа Вайценбёка, QS(G\ σ \S\C\R): $\sigma = 0$, $S = 0$, $R = {}^{\Phi}\tilde{R} = 0$, $T = H \neq 0$. В этом весьма специальном случае неисчезающее гамильтоново кручение (или собственная Q-связность) может компенсировать риманову кривизну. Такое пространство с только кватернионным кручением условно можно отнести к автопараллельным Q-пространствам 3-его типа Вайценбёка.

12. «Риманово-плоское» Q-пространство, QS(G\ σ \S\C\ $\tilde{R}$): $\sigma = 0$, $S = 0$, $R = {}^{\Phi}\tilde{R} = 0$, $T = H \neq 0$. В таком Q-пространстве чисто риманова кривизна обращается в ноль (так сказать, «нет сил гравитации»), однако гамильтоново кручение, индуцированное наличием собственной Q-связности, присутствует.

13. «Евклидово» Q-пространство, QS(G\ σ \S\C\R\T): $\sigma = 0$, $S = 0$, $R = {}^{\Phi}\tilde{R} = 0$, $T = H = 0$. Это простейший случай кватернионного пространства: все дифференциальные характеристики по отдельности исчезают. Если бы метрика выражалась символом Кронекера (скалярная часть Q-метрики), то такое пространство было бы в точности евклидовым.

Графически вышеизложенная классификация изображена на рис. 3-7.

Классификация Q-пространств «по аффинным характеристикам»

Редукционная схема может быть, конечно, и иной, хотя начальная позиция QS(G) и финал редукции QS(G\ σ \S\C\R\T), очевидно, остаются неизменными. В качестве иллюстрации можно привести другую классификацию, основанную на постепенном отказе не от «экзотических», «плохих» характеристик (неметричности, кручения), а наоборот, от «привычных», «хороших», например, римановых и аффинных объектов. Такая схема также может оказаться полезной для изучения кватернионной специфики в наиболее простых с точки зрения геометрии и топологии пространствах.

1’. Q-пространство общего вида, QS(G), исходный пункт любой редукционной схемы. Здесь естественно возникают случаи общего безторсионного пространства QS(G\T) и пространства Вайценбёка первого типа QS(G\R), уже рассмотренныен выше и поэтому более не обсуждаемые.

Первый (весьма сильный) шаг упрощения в данной схеме – отказ от римановой кривизны, и как следствие допустимость отсутствии римановой части связности и наличия декартовых координатных сеток.

2’. «Декартово» Q-пространство, QS(G\ $\widetilde{R}$): ${}^{\Phi}\widetilde{R}=0$, $S\neq 0$, $\sigma\neq 0$, $R={}^{\overline{\Phi}}\overline{\breve{R}}+{}^{Q}\breve{R}\neq 0$, $T=C+H\neq 0$. Тензор кривизны имеет две составляющих: кривизну, построенную из картанова кручения и аффинной неметричности (с ковариантными производными относительно Q-связности) и кривизну, построенную из Q-неметричности. От этого пространства возможны две очевидные редукционные ветви, которые подробно не обсуждаются: «декартово» безторсионное Q-пространство QS(G\ $\widetilde{R}$ \T), и «декартово» автопараллельное QS(G\ $\widetilde{R}$ \ R) (также некоторый тип Вайценбёка).

Далее идет освобождение от остальных аффинных характеристик – неметричности и кручения (очередность существенна для определения типа, но варианты легко просчитываются, поэтому здесь рассмотрен лишь один).

3’. Чисто кватернионное пространство с картановым кручением, QS(G\ $\widetilde{R}$ \ S): ${}^{\Phi}\widetilde{R}=0$, $S=0$, $\sigma\neq 0$, $R={}^{\overline{\Phi}}\overline{R}+{}^{Q}\breve{R}\neq 0$, $T=C+H\neq 0$. C-кручение, как видно, входит и в выражение для кривизны, и в формулу полного кручения. От этой позиции также выстраиваются две ветви – безторсионное QS(G\ $\widetilde{R}$ \ S\T) и автопараллельное QS(G\ $\widetilde{R}$ \ S\ R) (тип Вайценбёка) чисто кватернионные пространства с C-кручением.

4’. Чисто кватернионное пространство, QS(G\ $\widetilde{R}$ \ S\ C): ${}^{\Phi}\widetilde{R}=0$, $S=0$, $C=0$, $\sigma\neq 0$, $R={}^{Q}\breve{R}\neq 0$, $T=H\neq 0$. Все дифференциальные характеристики строятся из чисто кватернионных величин – собственной Q-связности и Q-неметричности.

5’. Метрическое чисто кватернионное пространство, QS(G\ $\widetilde{R}$ \ S\ C\ σ): ${}^{\Phi}\widetilde{R}=0$, $S=0$, $C=0$, $\sigma=0$, $R={}^{Q}\breve{R}=0$, $T=H\neq 0$. Отказ от Q-неметричности имеет своим следствием исчезновение кватернионной кривизны; отлична от нуля только собственная Q-связность (H-кручение). Несложно заметить, что, начиная с этой позиции, предложенная выше и данная редукционные схемы сходятся. Действительно, рассматриваемое здесь Q-пространство есть не что иное как «Риманово-плоское» из 12 позиции первой классификации; так разные логические подходы приводят к тому, что одни и те же пространства получают различные описательные характеристики (это, кстати, видно и в записи их кратких обозначений, похожих, но не тождественных).

6’. <u>«Евклидово» Q-пространство,</u> QS(G\ $\widetilde{R}$ \ S\ C\ σ \ H): ${}^{\Phi}\widetilde{R}=0$, $S=0$, $C=0$, $\sigma=0$, $R={}^{Q}\breve{R}=0$, $T=H=0$. Финальная позиция данной редукционной схемы, как и ожидалось, совпадает с позицией 13 предыдущей классификации.

Графическое представление второй классификации представлено на рис. 3-8.

Обсуждение понятия и классификации Q-пространств

Определение понятия кватернионного пространства, исследование их свойств как специфических дифференцируемых многообразий и последующее построение возможных классификаций представляется весьма целесообразным, по крайней мере, по двум причинам.

Первая причина – это исследовательский императив, заставляющий принимать во внимание чисто математический факт возможности существования таких пространств. Вторая причина более приземленная. Она состоит в том, что имеется целый ряд областей прикладной математики и теоретической физики, где кватернионы – «узнанные» или «инкогнито» – участвуют самым активным образом и иной раз несут основную (а не инструментальную) смысловую нагрузку. Примеров можно привести довольно много.

Одна из простейших, но наиболее емких сфер применения дифференциальных характеристик Q-пространств является классическая ньютонова механика. Переписанные на языке кватернионных реперов уравнения Ньютона могут описывать движение материальных точек и твердых тел в любых как угодно сложно вращающихся системах отсчета (см., например работу [112]).

Естественным продолжением этой темы оказывается изучение наиболее простых Q-пространств в комплексных координатах. На их основе оказывается возможным построение кинематики релятивистских систем отсчета, движущихся с произвольным ускорением. Такой подход к построению кватернионный теории относительности позволяет найти решения достаточно сложных задач неинерциального движения, имеющих свои результатом новые эффекты релятивистской кинематики [113].

Использование ряда типов Q-пространств в качестве сечений четырехмерного пространства-времени оказывается плодотворным для построения единых теоретико-полевых моделей, не менее интересных и эффективных по физическим следствиям, чем модели с картановым кручением [114].

Одним из интереснейших направлений исследований является также изучение свойств кватернионной неметричности и тензора Q-неметрической кривизны, который по формальным признакам оказывается сходным с тензором напряженности поля Янга-Миллса.

Возможность извлечения «квадратного корня» из вектора-кватерниона посредством введения его собственных функций, имеющих спинорную структуру, отражая, с одной стороны, факт наличия внутренней структуры точек Q-пространства, в то же время указывает на их связь с фермионными физическими полями. Одним из естественных следствий этого обстоятельства оказывается пример из нерелятивистской квантовой механики, где, с использованием понятия Q-метрики, оказывается возможным не эвристический, а логический вывод уравнения Паули [115].

Наконец, вспоминая, что уравнения электродинамики Максвелла впервые записаны Максвеллом в кватернионном базисе, следует признать, что список применения Q-пространств можно было бы продолжить.

Достаточно подробное исследование некоторых семейств Q-пространств из предложенных выше классификаций будет проведено во второй части данной книги. А эта глава завершается небольшим математическим исследованием, имеющим, скорее, не фундаментальное, а методически-прикладное значение.

3.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ ВРАЩЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ЛАМЕ

Выражение дифференциалов неголономных координат через дифференциалы голономных координат $dx_k = g_{ka} dy^a$, т.е. своего рода «подъем геометрии» из базового пространства в касательное, будет кратко называться «лифтом Ламе». Поскольку при этом метрический тензор базы преобразуется в касательные реперы, можно также говорить о «лифте Ламе» для метрики.

Представление поворотов Q-триады лифтами Ламе

Предлагается следующая

Теорема.

Произведение (со сверткой) двух лифтов Ламе g_{ka} и $g_{n'a}$ одной метрики в два разных репера есть матрица преобразования (поворота) первого репера во второй. И обратно: матрица трехмерного поворота общего вида $O_{m'n} \in SO(3, C)$ всегда может быть представлена как произведение лифтов Ламе некоторой метрики в два разных репера

$$O_{n'k} = g^a_{n'} \, g_{ka} \, . \qquad (3\text{-}28)$$

Доказательство.

Достаточность: инвариантный Q-вектор дифференциал в $\mathbf{Q}_3$ есть

$$d\mathbf{r} = dx_k \mathbf{q}_k = g_{ka} dy^a \mathbf{q}_k = g_{n'a} dy^a \mathbf{q}_{n'} \, , \qquad (3\text{-}29)$$

но, поскольку $\mathbf{q}_{n'} = O_{n'k} \mathbf{q}_k$, из (3-29) следует $g_{ka} = g_{n'a} O_{n'k}$ и после умножения на $g^a_{n'}$ – формула (3-28).

Необходимость: пусть оператор произвольного вращения $O_{n'k}$, действуя на лифт Ламе, генерирует некоторую новую матрицу

$$y_{n'a} = O_{n'k} \, g_{ka} \, .$$

Свойства новой матрицы таковы:

$$y_{n'a} \, y^a_{m'} = O_{n'k} \, g_{ka} \, O_{m'j} \, g^a_j = \delta_{m'n'} \, ,$$

$$y_{n'a} \, y_{n'b} = O_{n'k} \, g_{ka} \, O_{n'j} \, g_{jb} = g_{ab} \, ,$$

откуда следует, что оператор вращения генерирует новый лифт Ламе той же метрики $y_{n'a} \equiv g_{n'a}$

$$g_{n'a} = O_{n'k} \, g_{ka} \, . \qquad (3\text{-}30)$$

Умножение обеих частей (3-20) на g_{ja} приводит к искомому выражению (3-28). Теорема доказана.

Однако поиск развернутой формы представления матрицы произвольного поворота в виде произведения двух матриц Ламе общего вида оказывается весьма сложной задачей. Здесь известны 9 компонент матрицы поворота, из которых только три независимы (см. главу 2), а неизвестными – 18 компонент коэффициентов Ламе. Из 9 уравнений (3-28) всегда можно выразить компоненты одного репера через компоненты второго и компоненты матрицы поворота по правилу Крамера. Вот, например, следующее из (3-28) выражение для одной компоненты штрихованного репера

$$g^1_{(1')} = \frac{1}{\sqrt{g}} \det \begin{pmatrix} O_{1'1} & g_{(1)2} & g_{(1)3} \\ O_{1'2} & g_{(2)2} & g_{(2)3} \\ O_{1'3} & g_{(3)2} & g_{(3)3} \end{pmatrix}, \tag{3-31}$$

где, как обычно, определитель матриц Ламе есть корень квадратный из определителя метрического тензора $g \equiv \det g_{ab}$, $\det g_{ka} = \sqrt{g}$.

На компоненты искомых матриц Ламе накладываются еще по 9 условий ортонормированности $g_{ab} g^a_{n'} g^b_{m'} = \delta_{nk}$, где $g_{ab} = g_{na} g_{nb}$. Вот пример одного такого условия в развернутом виде

$$\begin{aligned} g_{ab}\, g^a_{(1')} g^b_{(1')} &= (g_{(1)1}\, g_{(1)1} + g_{(2)1}\, g_{(2)1} + g_{(3)1}\, g_{(3)1})\, g^1_{(1')}\, g^1_{(1')} + (g_{(1)2}\, g_{(1)2} + g_{(2)2}\, g_{(2)2} + g_{(3)2}\, g_{(3)2})\, g^2_{(1')}\, g^2_{(1')} + \\ &+ (g_{(1)3}\, g_{(1)3} + g_{(2)3}\, g_{(2)3} + g_{(3)3}\, g_{(3)3})\, g^3_{(1')}\, g^3_{(1')} + 2(g_{(1)1}\, g_{(1)2} + g_{(2)1}\, g_{(2)2} + g_{(3)1}\, g_{(3)2})\, g^1_{(1')}\, g^2_{(1')} + \\ &+ 2(g_{(1)1}\, g_{(1)3} + g_{(2)1}\, g_{(2)3} + g_{(3)1}\, g_{(3)3})\, g^1_{(1')}\, g^3_{(1')} + 2(g_{(1)2}\, g_{(1)3} + g_{(2)2}\, g_{(2)3} + g_{(3)2}\, g_{(3)3})\, g^2_{(1')}\, g^3_{(1')} = 1. \end{aligned}$$

Эти условия после подстановки в них выражений (3-31) связывают неизвестные компоненты g_{ka} с известными компонентами матрицы $O_{m'n}$. Для определения этой связи необходимо разрешить систему из девяти уравнений, каждое из которых, будучи квадратичной формой относительно определителей (3-31), содержит в левой части 648 членов шестой степени по неизвестным компонентам матриц Ламе. Не исключено, что в процессе решения уравнения упрощаются; однако, в целом задача представляется достаточно непростой.

В некоторых частных случаях решение найти удается. Примером может служить представление в виде (3-28) матриц простого вращения.

Пусть известна матрица простого вращения вокруг оси $\mathbf{q}_3$ на комплексный угол A

$$O_{n'k} = O^A_3 \equiv \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3-32}$$

Требуется найти два лифта Ламе g_{ka} и $g^a_{n'}$, такие, что, с одной стороны, удовлетворяется (3-28), а с другой – условия формирования компонент метрики

$$g_{ab} = g_{ka}\, g_{kb}, \qquad g^{ac} = g^a_{n'}\, g^c_{n'} \tag{3-33}$$

во взаимных голономных координатах:

$$g_{ab}\, g^{ac} = \delta^c_a . \tag{3-34}$$

Ниже в вычислениях, чтобы не путать компоненты метрики и с компонентами матриц Ламе, «триадные» индексы последних будут взяты в круглые скобки.

Уравнения (3-28), записанные в развернутом виде

$$g^a_{(1')}\, g_{(1)a} = \cos A, \qquad g^a_{(1')}\, g_{(2)a} = \sin A, \qquad g^a_{(1')}\, g_{(3)a} = 0,$$

$$g^a_{(2')}\, g_{(1)a} = -\sin A, \qquad g^a_{(2')}\, g_{(2)a} = \sin A, \qquad g^a_{(2')}\, g_{(3)a} = 0,$$

$$g^a_{(3')}\, g_{(1)a} = 0\,, \qquad g^a_{(3')}\, g_{(2)a} = 0\,, \qquad g^a_{(3')}\, g_{(3)a} = 1\,,$$

упрощаются при условиях $g_{(1)3} = g_{(2)3} = 0$, $g^3_{(1')} = g^3_{(2')} = 0$, при этом $g^3_{(3')}\, g_{(3)3} = 1$. Тогда согласно формулам (3-31) компоненты одного лифта Ламе выражаются через компоненты другого следующим образом

$$g^1_{(1')} = \frac{g_{(2)2}\cos A - g_{(1)2}\sin A}{g_{(1)1}\, g_{(2)2} - g_{(2)1}\, g_{(1)2}}\,, \qquad g^2_{(1')} = -\frac{g_{(2)1}\cos A - g_{(1)1}\sin A}{g_{(1)1}\, g_{(2)2} - g_{(2)1}\, g_{(1)2}}\,,$$

$$g^1_{(2')} = -\frac{g_{(1)2}\cos A + g_{(2)2}\sin A}{g_{(1)1}\, g_{(2)2} - g_{(2)1}\, g_{(1)2}}\,, \qquad g^2_{(2')} = \frac{g_{(1)1}\cos A + g_{(2)1}\sin A}{g_{(1)1}\, g_{(2)2} - g_{(2)1}\, g_{(1)2}}\,,$$

$$g^3_{(3')} = \frac{1}{g_{(3)3}}\,. \tag{3-35}$$

Соотношения (3-35) приобретают компактный вид при замене переменных $g_{(1)1} \equiv a\sin \varGamma$, $g_{(2)1} \equiv a\cos \varGamma$, $g_{(1)2} \equiv b\sin B$, $g_{(2)2} \equiv b\sin B$, $g_{(3)3} \equiv c$, где множители *a*, *b*, *c* – действительны, а углы *B* и *Г*, вообще говоря, могут быть комплексными:

$$g^1_{(1')} = \frac{\sin(A-B)}{a\cos(B+\varGamma)}\,, \qquad g^2_{(1')} = \frac{\cos(A+\varGamma)}{b\cos(B+\varGamma)}\,,$$

$$g^1_{(2')} = \frac{\cos(A-B)}{a\cos(B+\varGamma)}\,, \qquad g^2_{(2')} = -\frac{\sin(A+\varGamma)}{b\cos(B+\varGamma)}\,, \qquad g^3_{(3')} = \frac{1}{c}\,. \tag{3-36}$$

При этом отличные от нуля ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора, вычисляемые по формулам (3-33), имеют простой вид

$$g_{11} = a^2\,, \qquad g_{12} = g_{21} = ab\sin(B+\varGamma)\,, \qquad g_{22} = b^2\,, \qquad g_{33} = c^2$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2\cos^2(B+\varGamma)}\,, \qquad g^{12} = g^{21} = -\frac{\sin(B+\varGamma)}{ab\cos^2(B+\varGamma)}\,,$$

$$g^{22} = \frac{1}{b^2\cos^2(B+\varGamma)}\,, \qquad g^{33} = \frac{1}{c^2} \tag{3-37}$$

и, конечно, удовлетворяют уравнениям (3-34). Определитель метрики в этом случае есть

$$g \equiv \det g_{ab} = \frac{1}{\det g^{ab}} = a^2 b^2 c^2 \cos^2(B+\varGamma)\,.$$

Итак, матрица простого вращения (3-32) может быть представлена в виде произведения двух различных лифтов Ламе некоторой метрики вида (3-37). Это представление здесь для наглядности записано в явной матричной форме

$$\begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(A-B)}{a\cos(B+\varGamma)} & \dfrac{\cos(A+\varGamma)}{a\cos(B+\varGamma)} & 0 \\ \dfrac{\cos(A-B)}{b\cos(B+\varGamma)} & -\dfrac{\sin(A+\varGamma)}{b\cos(B+\varGamma)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\sin\varGamma & a\cos\varGamma & 0 \\ b\cos B & b\sin B & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \tag{3-38}$$

Определители матриц Ламе

$$\det g_{ka} = \frac{1}{\det g^a_{k'}} = -abc\cos(B+\varGamma)\,,$$

будучи каждый корнем квадратным из определителя своей метрики, как и ожидалось, в произведении дают единицу.

Легко показать, что соотношения, аналогичные (3-36), (3-37) и (3-38) могут быть записаны для двух оставшихся простых вращений O_2^{Δ}, O_1^{Ξ}, где Δ, Ξ – комплексные «углы»; при этом соответствующие метрические тензоры, кроме диагональных, могут иметь перекрестные члены g_{23} или g_{31}.

Преобразование римановой кривизны при поворотах Q-триады

В этом разделе рассмотрен случай «риманова» Q-пространства QS(G\ σ \S\C\T), в котором отлична от нуля только риманова кривизна[26]

$$^{\Phi}\widetilde{R}_{kmab} = \partial_a \Phi_{bkm} - \partial_b \Phi_{akm} + \Phi_{bkn}\Phi_{anm} - \Phi_{akn}\Phi_{bnm}, \qquad (3\text{-}39)$$

а остальные дифференциальные характеристики равны нулю. Ниже приведен вывод закона преобразования кривизны (3-39) в том случае, когда произвольная матрица вращения, генерирует из одного лифта Ламе другой, то есть когда в касательном пространстве переход от одного репера к другому осуществляется $SO(3,C)$ -преобразованием (3-30)

$$g_{m'a} = O_{m'n} g_{na}.$$

Коэффициенты вращения Риччи при этом преобразуются следующим образом

$$\Phi_{bk'm'} = g^a_{m'} \widetilde{\nabla}_b g_{k'a} = O_{m'n}\, g^a_n\, \widetilde{\nabla}_b (O_{k'j}\, g_{ja}) = O_{m'n}\, \partial_b O_{k'n} + O_{m'n}\, O_{k'j}\, g^a_n\, \widetilde{\nabla}_b\, g_{ja} \;. \qquad (3\text{-}40)$$

Стоит напомнить, что $\widetilde{\nabla}_b$ означает ковариантную производную относительно символов Кристоффеля. Легко заметить, что первое слагаемое правой части (3-40), нарушающее тензорный закон преобразования коэффициентов вращения (представленное вторым слагаемым) есть не что иное как собственная (Q-метрическая) Q-связность, то есть

$$\Phi_{bk'm'} = \widetilde{\omega}_{bk'm'} + O_{m'n}\, O_{k'j}\, \Phi_{bjn} \;. \qquad (3\text{-}41)$$

Теперь любопытно выяснить, каким образом преобразование (3-30) меняет вид римановой кривизны. Подстановка преобразованной связности (3-41) в определение кривизны (3-39), записанной в штрихованном репере, после пространных, но несложных вычислений дает

$$^{\Phi}\widetilde{R}_{k'm'ab} = \partial_a \widetilde{\omega}_{bk'm'} - \partial_b \widetilde{\omega}_{ak'm'} + \widetilde{\omega}_{bk'n'}\widetilde{\omega}_{an'm'} - \widetilde{\omega}_{ak'n'}\widetilde{\omega}_{bn'm'} + O_{k'i}\, O_{m'j}\, \widetilde{R}_{ijab} \;.$$

Первые четыре члена последнего выражения группируются в чисто кватернионную метрическую кривизну $^{Q}\widetilde{R}_{kmij}$, которая, как показано выше в формуле (3-25), тождественно равна нулю. Следовательно, при любых поворотах Q-триады риманова кривизна в «триадных» компонентах преобразуется по тензорному закону

$$^{\Phi}\widetilde{R}_{k'm'ab} = O_{k'i}\, O_{m'j}\, \widetilde{R}_{ijab}\,, \qquad (3\text{-}42)$$

являясь при этом, конечно, тензором по отношению ко всем допустимым преобразованиям голономных координат.

[26] Здесь для упрощения индексы производных отнесены к голономным координатам.