ЧАСТЬ ВТОРАЯ
КВАТЕРНИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ФИЗИКЕ

Понятие кватернионных пространств оказывается плодотворным в применении к описанию широкого ряда физических объектов – от систем отсчета до полей и собственно пространств. Характерные примеры различных Q-пространств в их связи как с хорошо известными, так и с нестандартными физическими моделями рассмотрены во второй части настоящей книги.

Одним из простейших, но весьма иллюстративных – и функциональных по существу – примеров является описание ньютоновой механики в системе отсчета наблюдателя, представленной кватернионным репером.

ГЛАВА 4.
УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА В КВАТЕРНИОННОМ РЕПЕРЕ[33]

Классическая механика предполагает бесконечную скорость распространения взаимодействий и сигналов. Системой отсчета в такой ситуации является триада направляющих векторов системы координат и – дополнительно и непременно – прибор для измерения времени (часы). «Быстродействие» обычной механики, однако, не означает, что для данной системы взаимодействующих тел наблюдатель всегда обнаружит одинаковые значения динамических величин, поскольку уравнения Ньютона в их классической форме справедливы только в инерциальных системах отсчета.

Триадой инерциальной системы отсчета, как уже отмечалось, может служить любой постоянный – не зависящий от точек физического пространства и от времени наблюдателя – кватернионный базис. Несложно определить, что пространство механики Ньютона в инерциальных системах отсчета, представленных Q-базисом в рамках обеих приведенных выше классификаций есть предельный случай «Евклидова» Q-пространства $QS(G\backslash\sigma\backslash S\backslash C\backslash R\backslash T)$. Впрочем, для классической механики, изучаемой с позиций инерциального наблюдателя факт принадлежности физического пространства к некоторому случаю классификации Q-пространств не привносит ничего нового.[34] Ситуация существенно меняется в случае неинерциальных систем отсчета.

4.1. ПРОИЗВОЛЬНО ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Неинерциальное движение системы отсчета складывается из ускоренных трансляций тела отсчета (материальной точки, или частицы) и любых вращений координатных осей. Для Q-триад, направляющих в данном подходе оси координат, естественным является подробно описанный в главе 2 механизм поворотов, в первую очередь пространственных. Поэтому здесь, в качестве первого этапа функционального использования специфики кватернионных триад предлагаются к рассмотрению только пространственно вращающиеся неинерциальные системы отсчета.[35] Вариант кватернионного анализа ускоренных движений тела отсчета наблюдателя (ускоренных бустов) будет приведен в следующей главе.

Q-пространство вращающихся триад и уравнения динамики Ньютона

Системы отсчета с Q-триадами, параметры поворота которых зависят от времени наблюдателя, очевидно неинерциальны. При этом пространство остается плоским, но становится отличной от нуля собственная (метрическая) кватернионная связность. Эти условия соответствуют позиции (12) первой классификации Q-пространств: «Римановоплоское Q-пространство», $QS(G\backslash\sigma\backslash S\backslash C\backslash\tilde{R})$, или (что эквивалентно) позиции (5’) второй классификации: «Метрическое чисто кватернионное пространство», $QS(G\backslash\tilde{R}\backslash S\backslash C\backslash\sigma)$. В

---

[33] Основные результаты этой главы опубликованы в работах [112], [116].

[34] Для квантовой механики это совсем не так, см. раздел «Q-пространства и квантовая механика».

[35] Существенно, что все вращения задаются относительно единого центра – начала системы отсчета.

данном случае существенно, что все компоненты Q-связности (и гамильтонова кручения) являются действительными функциями действительных переменных.

Уравнения Ньютона для частицы массы m с позиций инерциального наблюдателя можно записать, явно учитывая характер специальной системы отсчета [например (2-4), (2-34а)]

$$\frac{d^2 x_{\tilde{k}}}{dt^2}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = f_{\tilde{k}}\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\ , \qquad (4\text{-}1)$$

где t - абсолютное время, $x_{\tilde{k}}$ – координаты частицы в базисе $\mathbf{q}_{\tilde{k}}$ (по сути – координаты в касательном пространстве, в данном случае эквивалентном базе), $f_{\tilde{k}}$ – удельная сила (на единицу массы), действующая на частицу[36] и для прямой задачи механики, как обычно, задаваемая из эвристических соображений. В силу постоянства $\mathbf{q}_{\tilde{k}}$ уравнения (4-1) допускают запись в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}}) = f_{\tilde{k}}\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\ ,$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}\ , \qquad (4\text{-}2)$$

где Q-векторы радиуса положения частицы и действующей на нее удельной силы форм-инвариантны относительно произвольных вращений Q-триады

$$\mathbf{r} \equiv x_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = x_n\,\mathbf{q}_n\ ,$$

$$\mathbf{f} \equiv f_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = f_n\,\mathbf{q}_n\ ;$$

при этом, вообще говоря, Q-репер $\mathbf{q}_n$ может быть функцией времени. Таким образом, уравнения (4-2) учитывают в изменении механических характеристик частицы динамику системы отсчета наблюдателя. Наиболее отчетливо это видно при записи уравнений (4-2) в развернутой форме (символы векторов триады после дифференцирования опущены)

$$\ddot{x}_n + 2\dot{x}_j\,\omega_{jn} + x_j\,\dot{\omega}_{jn} + x_m\,\omega_{mj}\,\omega_{jn} = f_n\ . \qquad (4\text{-}3)$$

Здесь величина[37]

$$\omega_{jn} \equiv \pm i \left\langle \frac{d}{dt}\mathbf{q}_j \right\rangle_n^{\mp} \qquad (4\text{-}4)$$

есть антисимметричная (по индексам) связность Q-пространства, имеющей в данном случае смысл угловой скорости вращения Q-репера (см. главу 2); связь между тензорными ω_{jn} и векторными ω_k компонентами последней дается формулами:

$$\omega_k \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{kjn}\,\omega_{jn}\ ,$$

$$\omega_{jn} = \varepsilon_{jnk}\,\omega_k\ . \qquad (4\text{-}5)$$

Подстановка определения (4-5) в (4-3) приводит к записи

---

[36] Это не измеряемое ускорение, а его причина, поэтому для обозначения выбран другой символ.

[37] Стоит напомнить, что в главе 2 [формулы (2-60), (2-61), (2-62)] даны несколько вариантов вычисления компонент собственной Q-связности. Формула (4-4) представляет вариант вычисления проекций Q-вектора с помощью собственных функций векторов Q-репера.

$$\ddot{x}_n + 2\dot{x}_j\,\omega_k\,\varepsilon_{kjn} + x_j\,\dot{\omega}_k\,\varepsilon_{kjn} + x_m\,\omega_k\,\omega_p\,\varepsilon_{kmj}\,\varepsilon_{pjn} = f_n \quad ,$$

которая в векторном обозначении приобретает хорошо знакомый из ньютоновской механики вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}]] = \mathbf{f} \ . \qquad (4\text{-}6)$$

Понятно, что уравнение (4-6) содержит в левой части четыре классических слагаемых: линейное ускорение частицы, кориолисово, угловое и центростремительное ускорения; последние три логично назвать «неинерциальными».

Стоит лишний раз заметить, что уравнения (4-3) (или их эквивалент (4-6)) позволяют описывать динамику частицы в системах отсчета, испытывающих вращения произвольной сложности. Существенно, что в кватернионном формализме такие вращения легко задаются с помощью стандартных угловых параметров (см., например, [18])[38]; из них весьма наглядными для обсуждаемых задач являются параметры простых вращений (в частности, углы Крылова или углы Эйлера).

Ниже приведен ряд примеров решения задач механики во вращающихся системах отсчета, в том числе продемонстрированы технические средства и приемы работы с кватернионными реперами.

4.2. УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА В СЛЕДЯЩЕМ Q-РЕПЕРЕ

Определения и общий вид уравнений

Следящим кватернионным репером будет называться такая, вообще говоря, переменная Q-триада, один из векторов которой всегда направлен на наблюдаемую частицу. В качестве такого «следящего» вектора можно, например, выбрать – первый вектор некоторого переменного репера $\mathbf{q}_k$. Пусть в «Евклидовом» Q-пространстве выбрана точка *M*, в которой размещается тело отсчета наблюдателя. В этой точке (как и в любой точке этого Q-пространства) имеется начало постоянной Q-триады $\mathbf{q}_{\tilde{n}}$, задающей направление декартовых координатных осей. Из этой триады наблюдается частица, находящаяся в данный момент времени в точке *N* с координатами $x_{\tilde{n}}$. Радиус вектор частицы, соединяющий точки *M* и *N*, задает направление вектора $\mathbf{q}_1$ искомого следящего базиса. Последний можно получить поворотом исходного базиса так, чтобы вектор $\mathbf{q}_{\tilde{1}}$ преобразовался в $\mathbf{q}_1$. Достичь этого можно многими путями, из них наиболее рациональный – осуществление двух последовательных простых вращений исходного репера сначала вокруг оси №3 на угол α, а затем – вокруг новой оси № 2 на угол $-\beta$[39] (Рис. 4-1)

$$\mathbf{q} = R_2^{-\beta}\,R_3^{\alpha}\,\tilde{\mathbf{q}}\ , \qquad (4\text{-}7)$$

где матрица преобразования $R_2^{-\beta}\,R_3^{\alpha} \to R_{k\tilde{n}}$ имеет следующий вид

---

[38] Наиболее известны следующие наборы параметров вращения Q-триад:
- параметры Кэли-Клейна – элементы матриц *U* спинорных преобразований группы *SU(2)*,
- параметры Родригеса-Гамильтона – компоненты построенные из матриц *U* единичного кватерниона,
- углы Эйлера – углы простых вращений последовательно вокруг осей №1, №2, затем вновь вокруг оси № 1,
- углы Крылова – углы простых вращений последовательно вокруг осей №1, №2 и №3.

[39] В данном случае поворот осуществляется противоположно правилу винта, поэтому угол поворота отрицателен.

$$R_{k\tilde{n}} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \qquad (4\text{-}8)$$

Если в качестве постоянного Q-базиса выбраны матрицы Паули (с коэффициентом $-i$), то преобразование (4-7) приводит к следящему реперу

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} \sin\beta & e^{-i\alpha}\cos\beta \\ e^{i\alpha}\cos\beta & -\sin\beta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} o & -ie^{-i\alpha} \\ ie^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} \cos\beta & -e^{-i\alpha}\sin\beta \\ -e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}. \qquad (4\text{-}9)$$

При этом по условию преобразования первый вектор триады (4-9) направлен вдоль радиуса-вектора частицы

$$\mathbf{r} = r\mathbf{q}_1. \qquad (4\text{-}10)$$

Для записи уравнений динамики потребуются все компоненты связности. В матричном виде (сразу все) они определяются по формуле [см. главу 2, (2-63)]

$$\omega_{kn} = R_{n\tilde{m}} \frac{d}{dt} R_{k\tilde{m}}, \qquad (4\text{-}11)$$

Дифференцирование матрицы (4-6) по времени и умножение ее на транспонированную дает

$$\omega_{kn} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\beta - \dot{\beta}\cos\alpha\sin\beta & \dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta - \dot{\beta}\sin\alpha\sin\beta & \dot{\beta}\cos\beta \\ -\dot{\alpha}\cos\alpha & -\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 \\ \dot{\alpha}\sin\alpha\sin\beta - \dot{\beta}\cos\alpha\cos\beta & -\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta - \dot{\beta}\sin\alpha\cos\beta & -\dot{\beta}\sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\alpha}\cos\beta & \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha}\cos\beta & 0 & \dot{\alpha}\sin\beta \\ -\dot{\beta} & -\dot{\alpha}\sin\beta & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4\text{-}12)$$

Другой способ расчета компонент основан на использовании формулы (4-4) [или формулы (2-60) из главы 2]. Для иллюстрации достаточно рассчитать одну компоненту связности, например, ω_{12}. Вначале по формулам (2-25) главы 2 вычисляется хотя бы одна пара собственных функций (пусть отрицательной четности, т.е. с собственным числом $-i$) вектора $\mathbf{q}_2$ из Q-триады (4-9)

$$\varphi_2^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -ie^{i\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi_2^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} ie^{-i\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4\text{-}13)$$

Затем рассчитывается производная по времени вектора $\mathbf{q}_1$

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = -i\begin{pmatrix} \dot{\beta}\cos\beta & e^{-i\alpha}(-i\dot{\alpha}\cos\beta - \dot{\beta}\sin\beta \\ e^{i\alpha}(i\dot{\alpha}\cos\beta - \dot{\beta}\sin\beta) & -\dot{\beta}\cos\beta \end{pmatrix}. \qquad (4\text{-}14)$$

Искомая компонента связности есть проекция вектора (4-14) на $\mathbf{q}_2$, вычисляемая с помощью проекторов (4-13)

$$\omega_{12} = i\varphi_2^- \dot{\mathbf{q}}_1 \psi_2^- = \dot{\alpha}\cos\beta,$$

она совпадает с соответствующей компонентой матрицы (4-12). Третий способ вычисления связности с использованием матриц спинорного преобразования и параметров Кэли-Клейна [см. формулы (2-61) главы 2] здесь не приводится. Выбор способа вычисления компонент связности следует осуществлять сообразно с его удобством и преимуществами (в смысле упрощения процедуры и уменьшения громоздкости выражений); все способы, конечно, приводят к одинаковым результатам.

Таким образом, следящий Q-репер описывается тремя независимыми компонентами связности (4-12), которые с использованием формул (4-5) кратко записываются так

$$\omega_1 = \omega_{23} = \dot{\alpha}\sin\beta\,, \qquad \omega_2 = \omega_{31} = -\dot{\beta}\,, \qquad \omega_3 = \omega_{12} = \dot{\alpha}\cos\beta\,. \qquad (4\text{-}15)$$

Теперь можно представить уравнения динамики (4-2) в следящем базисе, определяемом условием (4-10), в развернутом виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} + r\omega_{12}\omega_{21} + r\omega_{13}\omega_{31})\mathbf{q}_1 + (2\dot{r}\omega_{12} + r\dot{\omega}_{12} + r\omega_{13}\omega_{31})\mathbf{q}_2 + (2\dot{r}\omega_{13} + r\dot{\omega}_{13} + r\omega_{12}\omega_{23})\mathbf{q}_3\,,$$

После замены обозначений в соответствии с (4-5) и выделения коэффициентов правой и левой части (4-2) при одинаковых кватернионных единицах векторное уравнение превращается в систему

$$\ddot{r} - r(\omega_2^2 + \omega_3^2) = f_1\,, \qquad (4\text{-}16а)$$

$$2\dot{r}\omega_3 + r\dot{\omega}_3 + r\omega_2\omega_1 = f_2\,, \qquad (4\text{-}16б)$$

$$-2\dot{r}\omega_2 - r\dot{\omega}_2 + r\omega_1\omega_3 = f_3\,. \qquad (4\text{-}16в)$$

Система (4-16) вместе с обозначениями (4-15) представляет собой наиболее общий вид уравнений ньютоновской динамики частицы в следящем репере. Если решается прямая задача механики, то компоненты удельной силы $f_k \equiv F_k / m$ (где F_k – вектор результирующей силы, действующей на частицу, m – масса частицы) задаются из эмпирических соображений и затем решается задача кинематики: координата, скорость и ускорение частицы определяются как функция абсолютного времени. При решении обратной задачи значения компонент силы определяются из (4-16) по наблюдаемым кинематическим характеристикам. Возможна, конечно, постановка и смешанных задач.

Свободная частица в следящем репере

В идеальном случае, когда на частицу не действуют силы, решение задачи кинематики упрощается выбором системы координат: одна ось параллельна скорости частицы, а линия движения проходит через начало отсчета. При этом интегрирование уравнений динамики тривиально. Однако в реальной практике подобрать такую систему отсчета почти никогда не возможно, и наблюдение частиц приходится вести из тех условий, в которых оказывается наблюдатель. В классической механике обычным является наблюдение визуальное, когда положение частицы регистрирует некоторый следящий за ней оптический прибор. В связи с этим анализ уравнений динамики в следящем базисе представляется не только методической иллюстрацией, но и математическим аппаратом небесполезным для практических целей.

Динамику свободной частицы описывают уравнения (4-16) с нулями в правой части

$$\ddot{r} - r(\omega_2^2 + \omega_3^2) = 0\,, \qquad (4\text{-}17а)$$

$$2\dot{r}\omega_2 + r\dot{\omega}_2 - r\omega_1\omega_3 = 0\,, \qquad (4\text{-}17б)$$

$$2\dot{r}\omega_3 + r\dot{\omega}_3 + r\omega_2\omega_1 = 0\,; \qquad (4\text{-}17в)$$

здесь для удобства уравнение (4-16в), умноженное на -1, перемещено на вторую строчку, а уравнение (4-16б) – на третью.

Сумма уравнений (4-17б), и (4-17в), предварительно умноженных соответственно на $2r^3\omega_2$ и $2r^3\omega_3$, приводит к первому интегралу системы

$$\pm r^2\sqrt{\omega_2^2+\omega_3^2} \equiv \sigma = const\,. \tag{4-18}$$

По единицам константы интегрирования $[\sigma]=$ см^2/с (в системе СГС) легко определяется ее физический смысл – это секторная скорость, т.е. площадь, которую радиус-вектор частицы «заметает» за одну секунду; эта величина очевидно положительная. Произведение секторной скорости на постоянную массу есть момент импульса частицы, который, будучи также постоянным, определяет некоторую пространственную плоскость, из которой частица при движении не выходит.

Подстановка в уравнение (4-17а) суммы квадратов компонент связности, выраженной из последнего соотношения дает уравнение изменения модуля радиуса-вектора частицы

$$\ddot{r}-\frac{\sigma^2}{r^3}=0\,.$$

Решение этого уравнения получается последовательным двойным интегрированием и имеет вид

$$r(t)=\sqrt{V^2(t-t_0)^2+\frac{\sigma^2}{V^2}}\,, \tag{4-19}$$

с двумя постоянными интегрирования: $V = const$ – скорость частицы, $t_0 = const$ – начальный момент времени наблюдения. Понятно, что в частном случае $\sigma = 0$ траектория проходит через начало координат, и $r(t)=V(t-t_0)$. В общем же случае нужно найти зависимость углов $\alpha,\ \beta$ от времени.

Несложно заметить, что для трех компонент связности, содержащих зависимость от углов, остается всего два уравнения: (4-18) и одно из уравнений (4-17б) или (4-17в). Эта свобода связана с упомянутым выше постоянством секторной скорости (момента импульса частицы), позволяющим выбрать любую пространственную плоскость, которую частица не покидает. Существенно упрощает задачу выбор условий

$$\omega_1 = 0\,,\ \alpha = 0\,, \tag{4-20}$$

отображающими факт движения частицы в плоскости, формируемой векторами $\mathbf{q}_{\tilde{1}}, \mathbf{q}_{\tilde{3}}$ постоянной триады (Рис. 4-2). Такой выбор имеет своим следствием уравнения

$$\omega_3 = 0\,,$$

$$\dot{\beta} = -\frac{\sigma}{V^2(t-t_0)^2+\sigma^2/V^2}\,.$$

Последнее уравнение легко интегрируется

$$\beta-\beta_0 = \arctan\left[\frac{V^2}{\sigma}(t-t_0)\right], \tag{4-21}$$

где β_0 есть угол наклона радиуса-вектора частицы к плоскости векторов $\mathbf{q}_{\tilde{1}}, \mathbf{q}_{\tilde{2}}$ в начальный момент измерения.

Наконец, траектория частицы находится исключением параметра времени из уравнений (4-19) и (4-21)

$$r\sin(\beta-\lambda_0)=\sigma/V\ ,$$

задача решена.

Следящий репер: частица со связью в поле постоянной силы

Пусть векторы поля постоянной силы, например, силы тяжести $\mathbf{F}=m\mathbf{g}$, направлены противоположно вектору $\mathbf{q}_{\tilde{3}}$ постоянной Q-триады $\mathbf{f}=-g\,\mathbf{q}_{\tilde{3}}=-g(\sin\beta\,\mathbf{q}_1+\cos\beta\,\mathbf{q}_3)$. Пусть также частица удерживается связью (нитью), закрепленной в начале координат, так что модуль радиуса-вектора частицы постоянен $r=a=const$, и на нее также действует сила реакции связи ***T***, направленная противоположно $\mathbf{q}_1$. Несложно проверить, что здесь также оказывается возможным использовать условия (4-20); при этом отличной от нуля остается единственная компонента связности $\omega_3=-\dot{\beta}$; и система динамических уравнений принимает вид

$$-a\dot{\beta}^2=-g\sin\beta-T/m\ , \tag{4-22а}$$

$$a\ddot{\beta}=-g\cos\beta\ . \tag{4-22б}$$

Решение уравнения (4-22б), определяющего зависимость угла отклонения нити от «горизонтальной» плоскости ($\mathbf{q}_{\tilde{1}}$, $\mathbf{q}_{\tilde{2}}$), дается эллиптическим интегралом

$$t-t_0=\int\frac{d\beta}{\sqrt{A^2-2B^2\sin\beta}}\ ,$$

с константами интегрирования *A, B*. Из уравнения (4-22а) определяется модуль силы реакции связи.

Пример приближенного решения этой задачи – математический маятник, для которого угол отклонения от «вертикали», заданной направлением силы $\mathbf{F}$, мал. Такой модели соответствует замена переменных $\beta=\dfrac{3\pi}{2}+\gamma$ при условии $\gamma<<1$ (Рис. 4-3) , при этом система динамических уравнений (4-22) записывается в виде

$$-a\dot{\gamma}^2=g-T/m\ , \tag{4-23а}$$

$$\ddot{\gamma}+\Omega^2\gamma=0\ ; \tag{4-23б}$$

где $\Omega\equiv\sqrt{g/a}$ – частота собственных колебаний маятника. Решение системы (4-23) хорошо известно

$$\gamma=\Gamma\sin(\Omega t+\varphi_0)\ ,$$

$$T=m[g+r\Omega^2\Gamma^{\,2}\cos^2(\Omega t+\varphi_0)]\ ,$$

где константы интегрирования имеют очевидный смысл: *Г* – угловая амплитуда колебания, φ_0 – начальная фаза. Понятно, что выражение для модуля силы реакции связи содержит слагаемое, квадратичное по малой амплитуде колебаний; им обычно пренебрегают.

Следящий репер: частица в поле центральной силы

Задача двух тел в механике сводится к задаче движения частицы с приведенной массой в поле центральной силы. Такая сила направлена по линии, соединяющей начало системы отсчета формального наблюдателя и частицу (т.е. по линии следящего вектора), а модуль ее есть функция модуля радиуса вектора частицы. В этом случае вновь применимы условия (4-20) выделяющие плоскость движения $\mathbf{q}_{\tilde{1}} - \mathbf{q}_{\tilde{3}}$, и система уравнений принимает простой вид

$$\ddot{r} - r\dot{\beta}^2 = f(r), \tag{4-24а}$$

$$-2\dot{r}\dot{\beta} - r\ddot{\beta} = 0. \tag{4-24б}$$

Уравнение (24б) сразу один раз интегрируется

$$r^2\dot{\beta} = \sigma = const, \tag{4-27}$$

т.е. в любом поле центральной силы секторная скорость (и момент импульса) есть постоянный интеграл движения. Из (4-27) следует выражение

$$r\dot{\beta}^2 = \sigma^2 / r^3 \ ,$$

подстановка которого в уравнение (4-24а) дает

$$\ddot{r} - \frac{\sigma^2}{r^3} = f(r). \tag{4-28}$$

Последовательное интегрирование уравнений (4-28) и (4-27) приведет к полному решению задачи кинематики в рассматриваемом случае.

Интегрирование уравнения (4-28). Пусть центральная сила потенциальна

$$f(r) = -\frac{1}{m}\frac{dU(r)}{dr} \ ,$$

где $U(r)$ – потенциальная энергия. Тогда, замечая, что

$$\sigma^2 / r^3 = -\frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma^2}{2r^2}\right),$$

уравнение (4-28) после умножения на m и $\dot{r}$ можно представить в виде полного дифференциала

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\sigma^2}{2r^2} + U(r)\right] = 0.$$

Начиная с этого момента, решение задачи приобретает стандартные очертания. Постоянный интеграл движения последнего уравнения – полная энергия

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\sigma^2}{2r^2} + U(r), \tag{4-29}$$

складывающаяся из кинетической и потенциальной частей. Кинетическая энергия в свою очередь состоит из двух слагаемых: энергии движения вдоль направления следящего репера и энергии движения в направлении, ему ортогональном. Действительно, второе слагаемое интеграла (4-29) в силу соотношения (4-27) представимо в виде

$$\frac{m\sigma^2}{2r^2} = \frac{m(r\dot{\beta})^2}{2} = \frac{mV_\beta^2}{2}. \qquad (4\text{-}30)$$

В то же время это слагаемое (4-30) явно зависит только от модуля радиуса-вектора частицы, поэтому его иногда наделяют смыслом добавки к потенциальной энергии для радиального движения

$$U_{эф}(r) \equiv U(r) + \frac{m\sigma^2}{2r^2},$$

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{эф}(r).$$

Из последнего уравнения следует представленная в неявном виде зависимость модуля радиуса-вектора частицы от времени

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{эф}(r)\right]}}, \qquad (4\text{-}31)$$

а подстановка после интегрирования (4-31) закона $r(t)$ (если такое выражение возможно) в уравнение (4-27) приводит к зависимости от времени угловой координаты

$$\beta(t) = \sigma \int \frac{dt}{r^2} . \qquad (4\text{-}32)$$

Уравнение траектории частицы есть следствие уравнений (4-27) и (4-31) при исключении из них параметра времени

$$\beta(r) = m\sigma \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2m[E - U_{эф}(r)]}} .$$

Видно, что для данной задачи запись уравнений в следящем репере и их решение осуществляются достаточно просто, при этом параметры движения оказываются естественно связанными с функциями наблюдательного прибора (зависимость от времени угла поворота визира, следящего за частицей).

Приведенные решения демонстрируют применимость метода следящего репера для классических задач. Этот метод, впрочем, позволяет также сравнительно просто формулировать и решать довольно широкий круг задач механики, связанных с вращением систем отсчета и твердых тел.

Вычисление «сил инерции»

Если заданы параметры и кинематические характеристики вращающегося твердого тела, то, имея в распоряжении уравнения (4-16), легко рассчитать силы, действующие на части этого тела. Это – обратная задача механики в неинерциальной системе отсчета; очевидно, реакции связей, «компенсирующих» возникающие ускорения могут интерпретироваться как «силы инерции». Ниже приведен простой пример.

Пусть куб (астероид) совершает два вращения вокруг диагоналей (ортогональных осей) с постоянными циклическими скоростями, т.е. углы Крылова изменяются по закону $\dot{\alpha} = \Omega_1 = const$, $\dot{\beta} = \Omega_2 = const$. Требуется оценить силу, которая действует на тело массы *m*, жестко закрепленное на конце третьей диагонали на расстоянии *a* от центра (в направлении ортогональном обеим осям вращения).

Решение задачи сразу следует из уравнений (4-15) и (4-16) при условии $r = a = const$

$$\omega_1 = \Omega_1 \sin \Omega_2 t\,, \qquad \omega_2 = -\Omega_2\,, \qquad \omega_3 = \Omega_1 \cos \Omega_2 t\,, \qquad \beta = \Omega_2 (t - t_0)\,,$$

$$F_1 = -ma(\Omega_2^2 + \Omega_1^2 \cos \Omega_2 t)\,, \quad F_2 = -2ma\Omega_1\Omega_2 \sin \Omega_2 t\,, \quad F_3 = \frac{1}{2} ma\Omega_1 \sin 2\Omega_2 t\,.$$

Очевидно, что тело испытывает действие сил со стороны связей, реагирующих на неинерциальный характер движения твердого тела (куба).

Вращающийся осциллятор

Пусть тело массы m может перемещаться без трения вдоль стержня, вращающегося вокруг одного своего конца с угловой скоростью $\omega = const$. Пусть при этом на тело действует упругая сила, возвращающее его к положению равновесия, которое находится на расстоянии a от центра вращения (Рис.4-4). Требуется определить закон движения тела и силу реакции стержня. По сути, это смешанная задача динамики для линейного осциллятора в равномерно вращающейся системе отсчета; ее решение удобно искать в следящем репере.

Из обозначенных условий следует: $\omega_1 = \omega_3 = 0$, $\omega_2 = -\dot{\beta} = -\omega$, $f_1 = -\frac{k}{m}(r - a)$, где k – коэффициент упругости; при $r > a$ тело притягивается к центру, в противоположном случае – отталкивается от него. Система уравнений (4-16) при этом упрощается

$$\ddot{r} - r\omega^2 = -\Omega^2 (r - a)\,, \tag{4-33а}$$

$$2\dot{r}\omega = f\,, \tag{4-33б}$$

где величина, обозначенная как $\Omega \equiv \sqrt{k/m}$ есть циклическая частота собственных колебаний осциллятора. Силу (на единицу массы) реакции f предстоит вычислить после определения закона движения тела вдоль стержня. Наличие двух частот различного происхождения предполагает вероятность нахождения целого семейства различных решений этой задачи. Анализ системы (4-33) это предположение полностью подтверждает.

В уравнении (4-33а) после его записи в виде

$$\ddot{r} + (\Omega^2 - \omega^2) r - a\Omega^2 = 0\,, \tag{4-34}$$

сразу выделяется случай равенства собственной частоты колебаний осциллятора и циклической скорости вращения системы отсчета.

Случай 1. Пусть $\Omega = \omega$, тогда уравнение (4-34) приобретает простой вид

$$\ddot{r} = a\Omega^2$$

и сразу дважды интегрируется

$$r - r_0 = \frac{a\Omega^2}{2} t^2 + V_0 t\,; \tag{4-35}$$

константы интегрирования очевидны: r_0 – начальное положение тела, V_0 – его начальная скорость. Согласно (4-35) масса m равноускоренно движется вдоль стержня в направлении от центра вращения, как под действием постоянной силы отталкивания. Сила f при этом будет линейно возрастать со временем и действовать на массу в направлении увеличения угла вращения. Когда радиус достигнет достаточно большого значения, механизм, ответственный за действие возвращающей силы, очевидно, должен разрушиться.

В специальном случае, когда положение равновесия осциллятора совпадает с центром вращения[40] $a = 0$, согласно решению (4-35), тело ведет себя как свободная частица, оно или покоится в произвольной точке стержня (тогда сила реакции отсутствует), или равномерно движется вдоль него в любом направлении:

$$r(t) - r_0 = V_0\, t\,,$$

сила реакции при этом постоянна.

Случай 2. Пусть теперь $\Omega^2 - \omega^2 \equiv \Delta^2 \neq 0$, уравнение (4-34) преобразуется к виду

$$\ddot{r} + \Delta^2\,(r - b) = 0\,,$$

где $b \equiv a\Omega^2 / \Delta^2$, и после замены переменной $x \equiv r - b$ обретает каноническую запись

$$\ddot{x} + \Delta^2\, x = 0$$

с общим решением $x(t) = C_1\, e^{i\Delta t} + C_2\, e^{-i\Delta t}$, или

$$r(t) = b + C_1\, e^{i\Delta t} + C_2\, e^{-i\Delta t}\,. \qquad (4\text{-}36)$$

Здесь просматриваются три типа физически различных решений.

Тип 1. постоянные интегрирования в (4-36) исчезают $C_1 = C_2 = 0$, тогда

$$r = b\,,$$

т.е. тело покоится, но уже не в произвольной, а в определенной точке стержня

$$b = \frac{a}{1 - (\omega / \Omega)^2}\,,$$

расположенной выше точки равновесия возвращающей силы. Сила реакции стержня при этом отсутствует. В специальном случае $a = 0$ тело остается неподвижным в начале координат.

В двух других типах решений $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$.

Тип 2. Собственная частота осциллятора больше циклической частоты вращения $\Delta^2 > 0$. В этом случае осциллятор осуществляет гармонические колебания с частотой Δ относительно положения равновесия b (в специальном случае $a = 0$ – относительно центра вращения). Сила реакции стержня есть гармоническая функция времени, меняющаяся с той же частотой.

Тип 3. $\Delta^2 < 0$. Здесь удобно сделать обозначение $\Delta \equiv i\Psi$, тогда решение (4-36) записывается в виде

$$r(t) = b + C_1\, e^{-\Psi t} + C_2\, e^{\Psi t}\,,$$

так что тело в итоге экспоненциально быстро удаляется от центра; столь же быстро возрастает поперечная сила реакции стержня.

Итак, задача имеет четыре разных решения.

При равенстве циклических частот:

1) тело равноускоренно удаляется от центра вращения. В частности, при совпадении центра вращения с точкой равновесия осциллятора тело равномерно удаляется от центра вращения (или покоится).

---

[40] При этом становятся возможными отрицательные значения радиальной координаты, так что стержень должен вращаться уже не вокруг своего конца, а лучше, вокруг середины.

При неравенстве циклических частот:

2) тело покоится в некоторой точке,
3) тело совершает гармонические колебания,
4) тело экспоненциально быстро удаляется от центра.

Обращает на себя внимание формальное сходство полученных решений с четырьмя известными решениями общей теории относительности для модели вселенной Эйнштейна – Фридмана – ДеСиттера: статической, линейно и экспоненциально расширяющейся и гармонически пульсирующей.

Маятник Фуко

Требуется сформулировать закон движения для математического маятника массы m с собственной частотой $\Omega = \sqrt{g/a}$, находящегося на поверхности планеты радиуса R на широте β_0; планета вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\dot{\alpha} \equiv \omega = const$.

Эту задачу удобно решать в «почти» следящем репере – в окрестности точки M поверхности, куда всегда направлен вектор $\mathbf{q}_1$ Q-триады (4-9) (Рис. 4-5). В силу абсолютного характера времени начало репера $\mathbf{q}_k$ можно перенести в точку M (как и в любую другую точку) планеты, которая в данном случае представляет собой пример Q-пространства с постоянным значением собственной связности. Компоненты последней определяют неинерциальность системы отсчета наблюдателя и вычисляются по формулам (4-15), которые с учетом условия задачи записываются как

$$\omega_1 = \omega \sin\beta_0\,, \qquad \omega_2 = 0\,, \qquad \omega_3 = \omega\cos\beta_0\,. \tag{4-37}$$

Репер (4-9) определяет в окрестности точки M направления смещений и действия сил:

- вдоль параллели по направлению $\mathbf{q}_2$ маятник может осуществлять малое смещение $x_2 \equiv x$ под действием возвращающей силы $-\Omega^2 x$,
- вдоль меридиана по направлению $\mathbf{q}_3$ возможно смещение $x_3 \equiv y$ под действием силы $-\Omega^2 y$.
- координата поверхности вдоль следящего за точкой M вектора постоянна $x_1 \equiv R$, смещение пренебрежимо мало, на маятник действуют сила тяжести g и неизвестная реакция связи T.

В заданных условиях и обозначениях система уравнений (4-3) приобретает вид

$$-2\dot{x}\omega\cos\beta_0 + y\sin\beta_0\cos\beta_0 - R\omega^2\cos^2\beta_0 = -g + T/m\,, \tag{4-38а}$$

$$\ddot{x} - 2\dot{y}\omega\sin\beta_0 - x\omega^2 = -x\Omega^2\,, \tag{4-38б}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x}\omega\sin\beta_0 + R\sin\beta_0\cos\beta_0 - y\omega^2\sin^2\beta_0 = -y\Omega^2\,; \tag{4-38в}$$

уравнения (4-38а) и (4-38б) позволяют найти закон движения, из уравнения (4-38а) определяется модуль силы реакции связи.

В общем случае точное интегрирование системы (4-38 б-в) затруднительно, но можно рассмотреть две следующих предельных позиции.

<u>Маятник на экваторе</u>: $\beta_0 = 0$. Здесь переменные в системе (4-38 б-в) разделяются

$$\ddot{x} + x(\Omega^2 - \omega^2) = 0\,, \qquad \ddot{y} + y\Omega^2 = 0\,.$$

При естественном условии $\Omega > \omega$ и обозначении $\Omega^2 - \omega^2 \equiv \Delta^2$ решение очевидно

$$x(t) = A\cos(\Delta t + \xi_0)\,,$$

$$y(t) = B\cos(\Omega t + \eta_0)\ ,$$

если обе амплитуды (константы интегрирования) отличны от нуля, то маятник совершает два колебания: вдоль параллели – с частотой Δ, меньшей, чем собственная, вдоль меридиана – с собственной частотой Ω.

Реакция связи

$$T/m = g - 2\dot{x}\omega - R\omega^2 = g + 2A\omega\Delta\sin(\Delta t + \xi_0) - R\omega^2\ ,$$

включает кориолисово и «центробежное» слагаемые.

Маятник на полюсе: $\beta_0 = \pi/2$. Система (4-38 б-в) содержит смешанные переменные

$$\ddot{x} - 2\dot{y}\omega + x\Delta^2 = 0\ , \qquad (4\text{-}39а)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x}\omega + y\Delta^2 = 0\ . \qquad (4\text{-}39б)$$

Домножив (4-39а) на $\dot{x}$, а (4-39б) на $\dot{y}$ и сложив результаты, можно найти интеграл полной энергии и гармоническую зависимость от времени модуля смещения – свойство, общее для любого идеального осциллятора. В рассматриваемом случае специфика неинерциального движения может проявиться в зависимости от времени не модуля, а компонент смещения, которые и предлагается найти. Поскольку система (4-39) представлена однородными линейными уравнениями 2-го порядка, решение можно искать в виде

$$x(t) = A(t)e^{i\Omega t}\ , \qquad y(t) = B(t)e^{i\Omega t}\ . \qquad (4\text{-}40)$$

Подстановка (4-40) в (4-39) после разделения действительных и мнимых частей приводит к эквивалентной системе уравнений

$$\dot{A} - \omega B = 0\ , \qquad \dot{B} + \omega A = 0\ ,$$

имеющей гармоническое решение

$$A = C\sin(\omega t + \chi_0)\ , \quad B = C\cos(\omega t + \chi_0)\ .$$

Окончательное решение системы (4-39) для плоского колебания имеет вид

$$x(t) = C\sin(\omega t + \chi_0)\cos(\Omega t + \varphi_0)\ , \qquad (4\text{-}41а)$$

$$y(t) = C\cos(\omega t + \chi_0)\cos(\Omega t + \varphi_0)\ . \qquad (4\text{-}41б)$$

Сила реакции связи определяется из (4-38а)

$$T = mg\ .$$

Из решения (4-41) следует, что вертикальная плоскость колебаний маятника, в системе отсчета, связанной с поверхностью планеты (на ее полюсе), вращается с частотой ω. Вращение плоскости колебаний, конечно, является кажущимся: на самом деле она не изменяет своей ориентации в пространстве (относительно «неподвижных звезд»), но вращается сама планета. На этом кинематическом эффекте построен способ наглядной демонстрации вращения Земли с помощью маятника Фуко.

Список задач механики, элегантно решаемых с использованием кватернионных триад, можно было бы существенно продолжить. Однако, наверное, следует оставить место творчеству читателя. Здесь остается только напомнить, что все рассмотренные в этой главе примеры неинерциальных систем отсчета, с точки зрения классификации Q-пространств, описывают метрические чисто кватернионные пространства с действительными координатами и компонентами Q-связности.