ГЛАВА 5. КВАТЕРНИОННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Компоненты кватернионов, вообще говоря, могут быть комплексными, в частности, мнимыми (с точки зрения алгебры комплексных чисел). В этом случае они часто называются бикватернионами; первым это понятие ввел У.Гамильтон, (см. также, [1], [58]). В алгебре бикватернионов есть сложности с определением нормы и деления. Тем не менее, бикватернионы находят применение в формальном описании ряда известных физических теорий и объектов, в первую очередь – теории относительности и группы Лоренца [59] – [61].

Специфическое подмножество бикватернионов, всегда имеющих вещественную норму, естественным образом выделяется из общего множества в ходе дальнейшего исследования, связанного с физико-геометрическими приложениями кватернионной математики. Это исследование продолжает тему форм-инвариантности векторов относительно преобразований, оставляющих неизменным правило кватернионного умножения, в частности, поворотов Q-триад матрицами из группы $SO(3,C)$.

Как и в предыдущей главе, здесь будут рассматриваться только метрические чисто кватернионные пространства $\mathrm{QS}(G\backslash\widetilde{R}\backslash S\backslash C\backslash\sigma)$, но с комплексными координатами и компонентами Q-связности: $C\!-\mathrm{QS}(G\setminus\widetilde{R}\setminus S\setminus C\setminus\sigma)$. Такое расширение области значений, вообще говоря, означает удвоение размерности. Но, как будет показано ниже, естественные физико-математические условия накладывают ограничения на число размерностей и комплексное Q-пространство остается трехмерным.

5.1. БИКВАТЕРНИОНЫ И БИКВАТЕРНИОННЫЕ ВЕКТОРЫ[41]

Элементы алгебры бикватернионов

Бикватернионом (комплексным кватернионом) называют число вида

$$z = A + B_k\,\mathbf{q}_k\,, \tag{5-1}$$

где компоненты кватерниона принадлежат множеству комплексных чисел $A, B_k \in C$.

Над бикватернионами (BQ), как и над кватернионами, определены следующие действия: ассоциативное и коммутативное сложение, ассоциативное, но не коммутативное умножение, а также кватернионное сопряжение.

$$\bar{z} = A - B_k\,\mathbf{q}_k\,. \tag{5-2}$$

Однако на этом сходство двух, казалось бы, родственных числовых множеств заканчивается; в BQ-алгебре выявляются две проблемы. Первая – в том, что стандартное правило не подходит для определения нормы произвольного бикватерниона

$$|z| \equiv \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{(A + B_k\,\mathbf{q}_k)(A - B_k\,\mathbf{q}_k)} = \sqrt{A^2 + B_k B_k}\;; \tag{5-3}$$

понятно, что правая часть выражения (5-3), вообще говоря, не есть вещественное число. Кроме того – и в этом вторая проблема, – в частном случае, норма BQ-числа может оказаться равной нулю. Тогда, если например, $|z_1| = 0$, уравнение типа

$$z_1\,z_2 = z_3$$

неразрешимо относительно z_2, т.е. не определяется частное от деления z_3 на z_1.

[41] Основные оригинальные результаты этого параграфа опубликованы в работах [117], [118].

Для выхода из ситуации в литературе обсуждаются другие варианты операции сопряжений (см., обзор [21]). Например, комплексное сопряжение кватерниона, можно определить следующим образом

$$z^{\times} \equiv (A^*, B_k^*) . \tag{5-4}$$

В комбинации с кватернионным сопряжением операция (5-4), конечно, позволяет определить норму BQ-числа

$$|z|' \equiv \sqrt{z\,\bar{z}^{\times}} = \sqrt{AA^* + B_k B_k^*} \ ,$$

но введение ее, тем не менее, представляется искусственным. Если сопряжение (5-2) затрагивает кватернион в целом, то (5-4) затрагивает лишь его компоненты, но не базисные единицы. Впрочем, такая «урезанность» операции имеет простое объяснение: определить комплексное сопряжение кватерниона в целом оказывается затруднительным, поскольку результат такой операции зависит от представления «мнимых» единиц. Действительно, пусть комплексное сопряжение дается формулой

$$z^* = A^* - (B_k\,\mathbf{q}_k)^* . \tag{5-5}$$

Применение этой операции к кватерниону, единицы которого заданы 2×2 -матрицами, например

$$z = (a+ib)\,\mathbf{q} = (a+ib)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{5-6}$$

означает комплексное сопряжение всех элементов

$$z^* = (a-ib)\,\mathbf{q}^* = (a-ib)\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$$

вычисление произведения $z\,z^*$ приводит к квадрату нормы

$$z\,z^* = (a+ib)(a-ib)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = a^2 + b^2 . \tag{5-7}$$

Но если кватернионная «мнимая» единица представлена 4×4 матрицей, содержащей только вещественные компоненты (об этом сказано в главе 1, параграф 1.2)

$$z = (a+ib)\,\mathbf{q} = (a+ib)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5-8}$$

то сопряжение (5-5) затрагивает только комплексную компоненту, и произведение типа (5-7) дает

$$z\,z^* = (a+ib)(a-ib)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -(a^2 + b^2) ;$$

для получения квадрата нормы очевидно требуется дополнительное кватернионное сопряжение.

Таким образом, хотя выражения (5-6) и (5-7) представляют в точности один и тот же кватернион, результаты их умножения на собственные комплексные сопряжения различны. Следовательно, определение комплексного сопряжения кватерниона в общем виде (без указания вида представления единиц) невозможно.

Форм-инвариантность BQ-чисел

Как уже отмечалось выше, несмотря на перечисленные сложности алгебры BQ-чисел, они оказываются удобны для формального описания соотношений релятивистской физики, в первую очередь, – стандартной специальной теории относительности. Тщательный анализ возможностей, которые предоставляет аппарат бикватернионов, выявляет также новые направления развития математического формализма и построения моделей для релятивистских физических систем. Одно из таких направлений – кинематика релятивистских систем отсчета – возникает в ходе изучения свойств форм-инвариантности векторных BQ-чисел относительно допустимых преобразований кватернионных триад.

Из главы 2 (раздел «Векторы-кватернионы, их проекции и форм-инвариантность») известно, что всякий вектор-кватернион с вещественными компонентами обладает свойством форм-инвариантности относительно произвольных как угодно сложных вращений Q-репера на любые действительные углы: $\mathbf{a} = a_k\,\mathbf{q}_k = a_{k'}\,\mathbf{q}_{k'}$. Но если параметры поворота комплексны, то ситуация меняется. Так, простое вращение с чисто мнимым параметром $\alpha \equiv i\psi$

$$O_3^{\psi} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & i\sinh\psi & 0 \\ -i\sinh\psi & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}9)$$

обращает простейший постоянный Q-репер $\mathbf{q}_k$ (домноженные на $-i$ матрицы Паули) в новую кватернионную триаду

$$\mathbf{q}_{1'} = -i\begin{pmatrix} 0 & e^{\psi} \\ e^{-\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{2'} = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{\psi} \\ ie^{-\psi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{3'} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом, однако, бывшие действительные компоненты претерпевают преобразование

$$a_k = (a_1, a_2, a_3) \to (a_1\cosh\psi - ia_2\sinh\psi,\ ia_1\sinh\psi + a_2\cosh\psi,\ a_3)\,, \qquad (5\text{-}10)$$

которое приводит к комплексным величинам, не имеющим в действительном трехмерном пространстве внятного геометрического смысла.

Если же все компоненты изначально комплексны, то таковыми они и остаются после преобразования Q-триады, так что всякий BQ-вектор вида[42]

$$\mathbf{z} = (a_k + ib_k)\,\mathbf{q}_k = \mathbf{a} + i\mathbf{b}\,, \qquad (5\text{-}11)$$

при надлежащей перегруппировке действительных и мнимых слагаемых в преобразованных компонентах является форм-инвариантным относительно преобразований группы $SO(3,C)$.

Однако BQ-числа с неопределенной нормой мало интересны с точки зрения физики. Поэтому ниже речь пойдет исключительно о таких комплексных кватернионных векторах, норма которых определяется:

$$\mathbf{z}\,\overline{\mathbf{z}} = (a_n + ib_n)(a_n + ib_n) = a^2 - b^2\,. \qquad (5\text{-}12)$$

[42] Далее векторы **a** и **b** будут кратко называться соответственно действительной и мнимой составляющими BQ-вектора, хотя безусловно вещественными являются только числа *a* и *b*, а входящие в определение кватернионные единицы могут содержать комплексные элементы.

Из (5-12) следует, что векторы **a** и **b** ортогональны друг другу, и эта ортогональность, конечно, не зависит от выбора Q-триады:

$$a_{k'}\, b_{k'} = a_n O_{nk'}\, b_m\, O_{mk'} = \delta_{mn}\, a_n\, b_m = 0\ .$$

Поэтому без потери общности рассуждений один вектор Q-триады можно направить вдоль одной из составляющих BQ-вектора (5-11), например $\mathbf{q}_1$ – вдоль мнимой части **b**. Тогда BQ-вектор (5-11), обладающий свойством (5-12), запишется в форме, с очевидностью демонстрирующей ортогональность действительной и мнимой составляющих[43]

$$\mathbf{z} = ib_1\,\mathbf{q}_1 + a_2\,\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3\,. \tag{5-13}$$

Пусть факт форм-инвариантности (5-13) отображает равенство

$$\mathbf{z} = ib_1\,\mathbf{q}_1 + a_2\,\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 = ib_{1'}\,\mathbf{q}_{1'} + a_{2'}\,\mathbf{q}_{2'} + a_{3'}\mathbf{q}_{3'}\,, \tag{5-14}$$

где все числа b_1, a_2, a_3; $b_{1'}$, $a_{2'}$, $a_{3'}$ вещественны.

Равенство (5-14) означает, что после преобразования Q-числа условие его нормируемости сохраняется в явном виде, т.е. при одном векторе новой Q-триады остается только мнимая компонента (при $\mathbf{q}_1$), а в ортогональной ему плоскости (при $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$) – только действительная компонента. Требуется найти множество преобразований из группы SO(3,C), удовлетворяющих соотношению (5-14). Решение этой задачи удобно искать, поочередно рассматривая все возможные простые вращения.

<u>1. Комплексный поворот вокруг мнимой составляющей BQ-вектора</u>

Пусть осуществляется комплексный поворот Q-триады в плоскости векторов $\mathbf{q}_2$ - $\mathbf{q}_3$, т.е. простое вращение вокруг направления $\mathbf{q}_1$ (или вектора **b)** на «угол» $\gamma + i\kappa$

$$\mathbf{q}' = O_1^{\gamma+i\kappa}\,\mathbf{q}\,, \tag{5-15}$$

где

$$O_1^{\lambda+i\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma\cosh\kappa - i\sin\gamma\sinh\kappa & \sin\gamma\cosh\kappa + i\cos\gamma\sinh\kappa \\ 0 & -\sin\gamma\cosh\kappa - i\cos\gamma\sinh\kappa & \cos\gamma\cosh\kappa - i\sin\gamma\sinh\kappa \end{pmatrix}.$$

Выразив из преобразования, обратного (5-15), векторы исходного репера и подставив их в условие форм-инвариантности (5-14), не трудно найти связь значений компонент BQ-вектора в старом и новом репере

$$b_{1'} = b_1\,,$$

$$a_{2'} = \cosh\kappa\,(a_2\cos\gamma + a_3\sin\gamma) + i\sinh\kappa\,(-a_2\sin\gamma + a_3\cos\gamma)\,,$$

$$a_{3'} = \cosh\kappa\,(-a_2\sin\gamma + a_3\cos\gamma) - i\sinh\kappa\,(a_2\cos\gamma + a_3\sin\gamma)\,.$$

Требование вещественности этих значений выполняется, если мнимая часть параметра вращения равна нулю $\kappa = 0$; при этом преобразования компонент действительной составляющей BQ-вектора сводятся к обычному повороту осей координат

---

[43] Вдоль вещественной составляющей **a** также можно направить один из векторов репера, например, $\mathbf{q}_2$, тогда вид BQ-вектора в компонентах проще $\mathbf{z} = ib\,\mathbf{q}_1 + a\,\mathbf{q}_2$. Однако, как будет показано ниже, в анализе преобразований, допускаемых условием инвариантности, все равно возникает более общая форма записи (5-13), поэтому лучше начинать прямо с нее.

$$a_{2'} = a_2 \cos\gamma + a_3 \sin\gamma\ ,$$
$$a_{3'} = -a_2 \sin\gamma + a_3 \cos\gamma\ .$$

Таким образом, вращения вокруг мнимой составляющей BQ-вектора оставляет его инвариантным только тогда, когда комплексный параметр поворота содержит лишь действительную часть. Повороты вокруг мнимой составляющей на мнимый «угол» запрещены. Понятно, что любой следующий поворот вокруг направления **b** складывается с предыдущим и также должен определяться действительным значением параметра.

<u>2. Комплексный поворот вокруг действительной составляющей BQ-вектора</u>

Здесь поочередно будут рассмотрены комплексные простые вращения вокруг каждого из «действительных» направлений $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$ BQ-вектора (5-13).[44]

Поворот вокруг $\mathbf{q}_2$. Такой поворот на комплексный «угол» $\beta + i\eta$ задается соотношением

$$\mathbf{q}' = O_2^{\beta+i\eta}\,\mathbf{q}\ . \tag{5-16}$$

При этом компоненты BQ-вектора преобразуются следующим образом

$$b_{1'} = \cos\beta\,(b_1 \cosh\eta + a_3 \sinh\eta) - i\sin\beta\,(b_1 \sinh\eta + a_3 \cosh\eta)\ ,$$

$$a_{2'} = a_2\ ,$$

$$a_{3'} = \cos\beta(b_1 \sinh\eta + a_3 \cosh\eta) - i\sin\beta\,(b_1 \cosh\eta + a_3 \sinh\eta)\ .$$

Вещественный характер чисел $b_{1'}$ и $a_{3'}$, обеспечивается очевидным условием $\beta = 0$, так что преобразования изменяющихся компонент сводятся к простому гиперболическому повороту

$$b_{1'} = b_1 \cosh\eta + a_3 \sinh\eta\ ,$$

$$a_{3'} = b_1 \sinh\eta + a_3 \cosh\eta\ .$$

Отсюда следует, что требование инвариантности (5-14) запрещает для преобразований типа (5-16) обычные повороты с действительным параметром.

Поворот вокруг $\mathbf{q}_3$. Это преобразование с комплексным параметром $\alpha + i\psi$

$$\mathbf{q}' = O_2^{\alpha+i\psi}\,\mathbf{q}\ . \tag{5-17}$$

Связь старых и новых компонент определяется соотношениями

$$b_{1'} = \cos\alpha\,(b_1 \cosh\psi + a_2 \sinh\psi) - i\sin\alpha\,(b_1 \sinh\psi - a_2 \cosh\psi)\ ,$$

$$a_{2'} = \cos\alpha\,(b_1 \sinh\psi + a_2 \cosh\psi) - i\sin\alpha\,(b_1 \cosh\psi + a_2 \sinh\psi)\ ,$$

$$a_{3'} = a_3$$

Требование вещественности чисел $b_{1'}$ и $a_{2'}$, приводит к исчезновению действительного параметра $\alpha = 0$, т.е. повороты типа (5-17) также могут быть только гиперболическими

$$b_{1'} = b_1 \cosh\psi + a_2 \sinh\psi\ , \tag{5-18а}$$

$$a_{2'} = b_1 \sinh\psi + a_2 \cosh\psi\ . \tag{5-18б}$$

[44] Можно было бы направить один вектор Q-триады вдоль **a** и анализировать вращения вокруг него (см. сноску на предыдущей странице). Но в этом случае третье направление, ортогональное задаваемой BQ-вектором плоскости, может ассоциироваться и с вещественными, и с мнимыми величинами. При этом поочередное рассмотрение вариантов удлиняет анализ.

Все варианты рассмотрены, и можно отметить следующее. Поворот репера вокруг мнимой составляющей BQ-вектора оставляет его инвариантным, если параметр поворота есть действительный (обычный) угол. И, наоборот, при вращении вокруг вещественной составляющей BQ-вектор инвариантен, если параметр мнимый. Понятно, что любой последующий допустимый поворот также приведет BQ-вектор к виду (5-14), или к более простому виду, но с заведомо определенным характером – вещественным или мнимым – всех направлений. Например, если в уравнениях (5-18) положить

$$a_2 = -b_1 \tanh\psi ,$$

то число компонент сокращается

$$b_{1'} = b_1 / \cosh\psi , \qquad a_{2'} = 0$$

и BQ-вектор приобретает вид

$$\mathbf{z} = ib_{1'}\,\mathbf{q}_{1'} + a_{3'}\,\mathbf{q}_{3'} ,$$

где с «потерянным» направлением $\mathbf{q}_{2'}$, по прежнему ассоциируется вещественная составляющая.

Специальные группы инвариантности BQ-чисел

Итак, BQ-вектор (5-13) остается форм-инвариантным в смысле (5-14) относительно множества таких преобразований, матрицы которых представляют собой сумму простых вращений,[45] выполняемых в произвольном порядке, но с действительным углом поворота относительно «мнимой оси» и мнимым параметром – относительно «вещественной оси». Допустимые простые вращения – действительные (R) и гиперболические (H) повороты схематически изображены на рис. 5-1.

Избранный вид BQ-вектора (5-13) сохраняют:

- один действительный поворот R_1^γ ,
- два гиперболических поворота H_2^η , H_3^ψ ,
- произведения любого числа матриц этих поворотов, организованные в произвольном порядке.

Во множестве этих матриц есть единичный (тождественный) оператор, и для каждой матрицы однозначно определена обратная. Следовательно, множество всех таких матриц образует группу, которая обозначается SO(1,2)[46] и является подгруппой группы SO(3,C).

Необходимо отметить, что группа SO(1,2), представленная 3×3 -матрицами, как и полная группа «векторных» преобразований Q-триад SO(3,C), имеет спинорный аналог – группу SL(1,2). Эта последняя представлена 2×2 -матрицами, которые связаны с матрицами «векторной» группы соотношением (см. главу 2) [47]

$$U = \pm\frac{1 - O_{k'n}\,\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n}{2\sqrt{1+Tr\,O}} .$$

По этой формуле определяются спинорные представления основных поворотов.

Для примера можно показать процедуру вычисления 2×2 -матрицы, соответствующей действительному повороту R_1^γ

[45] Результат нескольких поворотов есть своеобразная сумма вращений относительно, вообще говоря, разных осей; такое «сложение» поворотов описывается произведением соответствующих матриц.

[46] Специальная ортогональная группа с базисными простыми вращениями: одним действительным и двумя гиперболическими.

[47] При этом кватернионные единицы также должны быть представлены 2×2 -матрицами. Четность по знаку означает, что спинорная группа SL(1,2) дважды покрывает свой векторный аналог SO(1,2).

$$U_1^{\gamma} = \pm \frac{1 - \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1 R_{1'1} - \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2 R_{2'2} - \mathbf{q}_3\mathbf{q}_3 R_{3'3} - \mathbf{q}_2\mathbf{q}_3 R_{2'3} - \mathbf{q}_3\mathbf{q}_2 R_{3'2}}{2\sqrt{1+Tr\,R}} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+Tr\,R} - \frac{R_{2'3} - R_{3'2}}{\sqrt{1+Tr\,R}}\mathbf{q}_1\right).$$

Компоненты матрицы простого вращения известны

$$R_{1'1} = 1, \qquad R_{2'2} = R_{3'3} = \cos\gamma, \qquad R_{2'3} = -R_{3'2} = \sin\gamma,$$

Их подстановка в предыдущую формулу дает

$$U_1^{\gamma} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2(1+\cos\gamma)} - \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2(1+\cos\gamma)}}\mathbf{q}_1\right) = \pm\left(\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\mathbf{q}_1\right).$$

Последнее соотношение определенно выделяет вектор, относительно которого осуществляется поворот; пусть этот вектор задан в простейшем представлении

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда искомая 2×2-матрица имеет следующий явный вид

$$U_1^{\gamma} = \mp i\begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) & -\sin(\gamma/2) \\ -\sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2) \end{pmatrix},$$

конечно, не единственный, поскольку вектор $\mathbf{q}_1$ имеет бесконечное число 2×2-матричных представлений.

Аналогичным образом (и тоже для простейших представлений) вычисляются спинорные матрицы, соответствующие гиперболическим поворотам относительно оставшихся двух ортогональных осей

$$U_2^{\eta} = \pm\left(\cosh\frac{\eta}{2} - \sinh\frac{\eta}{2}\mathbf{q}_2\right) = \mp i\begin{pmatrix} \cosh(\eta/2) & i\sinh(\eta/2) \\ -i\sin(\eta/2) & \cos(\eta/2) \end{pmatrix},$$

$$U_3^{\psi} = \pm\left(\cosh\frac{\psi}{2} - \sinh\frac{\psi}{2}\mathbf{q}_3\right) = \mp i\begin{pmatrix} \exp(\psi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\psi/2) \end{pmatrix},$$

Завершая этот раздел, следует заметить, что определенно нормируемый BQ-вектор можно записать так, что вдоль выделенного вектора Q-триады направлена вещественная составляющая, а мнимая неким образом расположена в ортогональной плоскости

$$\mathbf{z} = ib_1\,\mathbf{q}_1 + ib_2\,\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3, \tag{5-19}$$

В этом случае условие инвариантности также меняет вид

$$\mathbf{z} = ib_1\,\mathbf{q}_1 + ib_2\,\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 = ib_{1'}\,\mathbf{q}_{1'} + ib_{2'}\,\mathbf{q}_{2'} + a_{3'}\mathbf{q}_{3'}. \tag{5-20}$$

Проделав анализ, аналогичный приведенному выше, несложно найти базовые преобразования, сохраняющие форму вектора (5-19). Таковыми являются простые вращения: относительно каждого из «мнимых» направлений – гиперболические повороты, а относительно действительной составляющей – обычные повороты. В данном случае имеет место ситуация, обратная предыдущей: «мнимым» осям поворота соответствуют мнимые параметры, а «действительной» оси – действительный параметр. Но базовыми, тем не менее, оказываются точно такие же вращения, что и раньше – одно действительное и два гиперболических; следовательно группой инвариантности BQ-вектора (5-19) в смысле (5-20) является та же группа SO(1,2) или ее 2:1-изоморфоное покрытие SL(1,2).