5.2. ОСНОВЫ «КВАТЕРНИОННОЙ» ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ[48]

Проанализированные в предыдущем разделе свойства нормируемых BQ-векторов и приведенные соотношения с определенностью намекают на использование этого математического аппарата для описания элементов релятивистской механики. Действительно, норма рассмотренных BQ-чисел представлена разностью квадратов компонент двух составляющих, а группой инвариантности является составленная из обычных и гиперболических поворотов подгруппа SO(3,C), изоморфной группе Лоренца. Кроме того, к этим традиционным «физическим ориентирам» естественным образом добавляется множество Q-триад, «населяющих» комплексное метрическое чисто кватернионное пространство $\mathrm{C-QS}(G \setminus \widetilde{R} \setminus S \setminus C \setminus \sigma)$; каждая из этих триад при определенных условиях может быть наделена качествами наблюдательного прибора. Таким образом, алгебра, групповые свойства и геометрия BQ-чисел подталкивают к тому, чтобы формулировать в этих терминах соотношения, свойственные релятивистским механическим системам. Здесь, однако, сразу заметна сложность. Известно, что геометризация специальной теории относительности потребовала от Минковского введения четвертого временного измерения, ортогонального трехмерному пространству. Формализм же кватернионных триад предоставляет в распоряжение всего три измерения для всех направлений – и временных, и пространственных. Тем не менее, и в таких строгих рамках оказывается возможным построение состоятельной и функциональной пространственно-временной релятивистской модели.

Пространственно-временной BQ-вектор

Требуется построить такой «метрический» BQ-вектор, который содержал бы информацию о пространственно-временных соотношениях, определенных в Q-триаде как в системе отсчета. Пусть из триады $\mathbf{q}_k$ наблюдается произвольно движущаяся частица. Тогда одно из направлений, например $\mathbf{q}_1$, следует зарезервировать за изменением времени наблюдателя dt и, следуя Минковскому, считать это направление мнимым. Второе и третье направления составляют пространственную плоскость, где изменяются действительные компоненты пространственного перемещения частицы $d\mathbf{r}$ и вычисляемые при необходимости компоненты изменения ее линейной скорости $d\mathbf{v}$. Имея это в виду, можно направить вдоль $d\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{q}_2$[49] с условием, что вакантное третье направление также пространственное. Таким образом, искомый «метрический» BQ-вектор имеет простой вид[50]

$$d\mathbf{z} = idt\,\mathbf{q}_1 + dr\,\mathbf{q}_2\,, \tag{5-21}$$

соответствующий записи нормируемого BQ-числа в форме (5-13), т.к. направление $\mathbf{q}_3$ заведомо признается пространственным. Это означает, что $d\mathbf{z}$ является SO(1,2)-инвариантом в смысле соотношения (5-14). Квадрат вектора (5-21)

$$dz^2 = dt^2 - dr^2 \tag{5-22}$$

с точностью до единичной матрицы есть квадрат линейного элемента теории относительности, инвариантный, как известно, относительно преобразований группы Лоренца. Однако, как показано выше, сохраняться может не только скалярное число (5-22), но форма векторного «корня квадратного» из этого числа, т.е. форма самого BQ-вектора $d\mathbf{z}$.

---

[48] Оригинальные результаты этого параграфа опубликованы в работах [119], [118], [109].

[49] Это всегда можно сделать, поворачивая Q-репер так, чтобы вектор $\mathbf{q}_2$ оставался параллельным скорости частицы.

[50] Здесь и далее фундаментальная скорость полагается равной единице, если не оговаривается обратное.

Поэтому в обсуждаемом подходе, вероятно, можно говорить о «более фундаментальном» уровне инвариантности, нежели в традиционном подходе СТО.

Как замечено в предыдущем разделе, к виду (5-21) может быть приведен любой нормируемый BQ-вектор, так что общий вид «метрического» вектора соответствует формуле (5-11)

$$d\mathbf{z} = (idt\, e_k + dx_k)\,\mathbf{q}_k = dt(i\, e_k + v_k)\,\mathbf{q}_k\,, \tag{5-23}$$

где единичный вектор, задающий направление времени, ортогонален скорости частицы

$$e_k\, e_k = 1, \qquad v_k = dx_k / dt\,, \qquad e_k v_k = 0\,.$$

Из представления (5-23) видно, что общее число размерностей Q-пространства данной релятивистской модели равно шести, причем это пространство симметрично, т.к. является суммой двух трехмерных Q-пространств

$$Q_6 = R_3 \oplus T_3\,,$$

где R_3 – обычное действительное трехмерное пространство изменения координат и скорости частицы, T_3 – тоже трехмерное (но мнимое по отношению к R_3) пространство. В T_3 выделена мнимая временная ось, нормальная плоскости, составленной векторами скорости и ускорения частицы. Наблюдатель в этой модели «работает» лишь с некоторыми сечениями шестимерного пространства Q_6, а поскольку объектами «работы» являются пространство R_3 и мнимая ось времени, возникает кажущееся представление о четырехмерии: $R_3 \oplus T$.

Домноженные на i векторы Q-триады $\mathbf{q}_k$, становятся единицами мнимого или «взаимно дуального» трехмерного пространства

$$\mathbf{p}_k \equiv i\,\mathbf{q}_k\,,$$

они подчиняются правилу умножения матриц Паули (поэтому для их обозначения и предложена аббревиатура $\mathbf{p}$)

$$\mathbf{p}_k \mathbf{p}_n = \delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{p}_j\,.$$

С математической точки зрения векторная пара $\{\mathbf{q},\mathbf{p}\}$ вместе со скалярной парой $\{1,i\}$ составляет базис алгебры BQ-чисел. С физико-геометрической точки зрения, две триады $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$, примененные в записи уравнения (5-23)

$$d\mathbf{z} = dt\, e_k \mathbf{p}_k + dx_k\, \mathbf{q}_k\,, \tag{5-24}$$

могут рассматриваться как принципиально различные, но дополнительные части единого объекта – шестимерной кватернионной релятивистской системы отсчета, три вектора которой ($\mathbf{q}_k$) служат для измерения пространственных интервалов, тогда как другая триада, жестко связанная с первой ($\mathbf{p}_k$), предназначена для измерения интервалов времени. Временная и пространственная части шестимерного пространства представляют собой «мнимые отображения» друг друга и, в отсутствие объектов, могут рассматриваться как изначально независимые и равноправные.

Стоит отметить, что в предлагаемом подходе столь симметричная конструкция «автоматически» возникает из Q-алгебры и свойств форм-инвариантности нормируемых BQ-векторов относительно группы, сохраняющей кватернионное умножение. Имеются и иные шестимерные схемы с равным числом измерений в пространственной и временной частях, предложенные из эмпирических соображений авторами, неудовлетворенными асимметрией размерностей четырехмерной теории. Наиболее известны в этой связи работы [62] – [64]. Однако в этих исследованиях пространственные и временные измерения наделялись равными правами и полной независимостью, что имело следствием значительные интерпретационные сложности. Кватернионная модель, имеющая своим источником фундаментальную алгебру, от этих недостатков свободна.

В дальнейшем кватернионные релятивистские системы отсчета (Q-CO), обладающие «встроенными» часами,[51] будут обозначаться символом $\Sigma \equiv \{\mathbf{p}_k\,,\, \mathbf{q}_k\}$, в отличие от ньютоновских Q-триад, требующих специального прибора для измерения времени. Соотношение, связывающее новую Q-CO $\Sigma' \equiv \{\mathbf{p}_{k'}\,,\, \mathbf{q}_{k'}\}$ с исходной преобразованием из группы SO(1,2)

$$\Sigma' = O\Sigma$$

будет кратко называться уравнением поворота.

Эффекты СТО и диаграммы скоростей

<u>Простейшее преобразование координат</u>.

Наблюдатель всегда может расположить свою Q-CO Σ так, чтобы BQ-вектор $d\mathbf{z}$ (5-24) принял простой вид

$$d\mathbf{z} = dt\,\mathbf{p}_1 + dr\,\mathbf{q}_2\,. \tag{5-25}$$

Пусть новую Q-CO Σ' и исходную Q-CO Σ связывает уравнение H-поворота

$$\Sigma' = H_3^{\psi}\,\Sigma\,,$$

которое очевидно сохраняет форму (5-25)

$$dt\,\mathbf{p}_1 + dr\,\mathbf{q}_2 = dt'\mathbf{p}_{1'} + dr'\,\mathbf{q}_{2'}\,.$$

Согласно соотношениям (5-17), (5-18), это приводит к известному преобразованию координат

$$dt' = dt\cosh\psi + dr\sinh\psi\,, \tag{5-26а}$$

$$dr' = dt\sinh\psi + dr\cosh\psi\,. \tag{5-26б}$$

со следующими из них простейшими кинематическими эффектами СТО: сокращением интервалов времени и длины.

Результат деления (5-26а) на (5-26б) определяет формулу преобразования скорости частицы при переходе из исходной Q-триады к гиперболически повернутой

$$v' = \frac{dr'}{dt'} = \frac{v + \tanh\psi}{1 + v\tanh\psi} = \frac{v+V}{1+vV}\,, \tag{5-27}$$

т.е. стандартную формулу СТО сложения параллельных релятивистских скоростей: скорости частицы

$$v = \frac{dr}{dt}$$

[51] «Встроенные часы» этого прибора – наличие оси времени – отличаются тем же своеобразием, что и часы стандартной теории относительности: измерение интервалов времени осуществляется посредством изменения длины, а не подсчетом числа циклов периодического процесса. Впрочем, это обстоятельство для вывода и интерпретации релятивистских соотношений не слишком важно. Различие способов определения понятия времени оказывается существенным для «облака», состоящего из большого числа Q-CO, наблюдатели в которых связаны необходимостью договариваться о том, что именно каждый из них считает объективным показателем изменения времени. См. об этом ниже, в параграфе 5.4, раздел «Способы измерения времени».

и скорости движения новой Q-триады относительно старой

$$V = \tanh\psi \ .$$

Наблюдение систем отсчета. Параллельное движение.

Понятно, что та Q-СО Σ', где $dr'=0$, имеет в качестве тела отсчета ту самую частицу, которая наблюдается из Q-СО Σ и движется в ней со скоростью $V = \tanh\psi$

$$dt'\mathbf{p}_{1'} = dt\,\mathbf{p}_1 + dr\,\mathbf{q}_2\,, \tag{5-28}$$

так что каждая частица может быть наделена своей Q-СО. Поэтому вместо частиц можно говорить о наблюдаемых системах отсчета, это облегчает формулировку и решение кинематических задач.

Классический пример – сложение скоростей для трех систем отсчета Σ, Σ' и Σ''.

Простейший случай: параллельное движение.

Пусть Σ' движется относительно Σ со скоростью $V_{\Sigma'}(\Sigma) \equiv V_1 = \tanh\psi_1$; индекс у символа скорости относится к наблюдаемой Q-СО, в скобках указана базовая Q-СО (база), из которой производится наблюдение. Пусть также Σ'' движется относительно Σ' со скоростью $V_{\Sigma''}(\Sigma') \equiv V_2 = \tanh\psi_2$, направленной параллельно V_1 . Тогда для вычисления скорости Q-СО Σ'' относительно базы Σ достаточно произвести два последовательных H-поворота с параметрами ψ_1 и ψ_2 вокруг одной и той же оси $\mathbf{q}_3$, или одно эквивалентное H-вращение на суммарный гиперболический угол $\psi_1 + \psi_2$

$$\Sigma'' = H_3^{\psi_1+\psi_2}\,\Sigma\,. \tag{5-29}$$

Результат хорошо известен

$$V_{\Sigma''}(\Sigma) = \tanh(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\tanh\psi_1 + \tanh\psi_2}{1 + \tanh\psi_1 \tanh\psi_2} = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2} \tag{5-30}$$

и, конечно, совпадает с выражением (5-27), полученным иначе, но отражающим ту же кинематическую ситуацию.

Преобразование от одной Q-СО к другой весьма наглядно иллюстрируются графически на **p-q** сечении шестимерного пространства «перемещений». Поскольку лишь базисные векторы и относительные скорости Q-СО (но не координаты) могут быть показаны на таких графиках, их целесообразно назвать диаграммами скоростей (в отличие от пространственно-временных диаграмм Минковского). Предварительно, однако, полезно привести один простой способ построения гипербол и кратко напомнить (а если нужно, то и установить) некоторые геометрические соотношения, характерные для этих кривых.

Единичная гипербола (рис. 5-2).

В заданной системе декартовых координат единичную (равностороннюю) гиперболу

$$y^2 - x^2 = 1 \tag{5-31}$$

удобно строить с помощью единичной окружности. Для этого из центра O под углом φ к оси OY проводится радиус $OP = 1$ в точку P, откуда строится касательная, пересекающая ось OY в точке K. Если теперь восстановить из точки K перпендикуляр к оси OY и отложить на нем отрезок KB, длина которого равна отрезку касательной PK, то точка B принадлежит гиперболе (5-31). Действительно, $OK^2 - KP^2 = OP^2 = 1$, но поскольку $KP = KB$, а $OK = y$ и

$KP = x$ суть ордината и абсцисса точки B, имеет место соотношение (5-31). Параметрическая запись

$$y = \cosh\psi\,, \qquad x = \sinh\psi \tag{5-32}$$

позволяет соответственно интерпретировать отрезки $OK = \cosh\psi$ и $KP = \sinh\psi$. Показать графически параметр ψ на рис. 5-2 нельзя, поскольку, в отличие от тригонометрического угла, равного длине дуги единичной окружности, гиперболический «угол» не есть длина дуги l единичной гиперболы, но связан с ней соотношением[52]

$$l = \int \sqrt{\cosh 2\psi}\; d\psi\,, \tag{5-33}$$

из которого видно, что значения параметра и длины дуги близки лишь при малых значениях ψ

$$l \cong \psi + \psi^2 / 2\,.$$

Тем не менее, в силу существования соотношения (5-33), для большей наглядности можно говорить о том, что всякой дуге гиперболы соответствует единственное значение параметра ψ (и обратно).

Луч, проведенный из центра O в точку B, наклонен к оси под углом α, величина которого легко определяется

$$\tan\alpha = KB / OK = AM / OA = \tanh\psi\,.$$

Из последнего соотношения также следует, что отрезок AM касательной к единичной окружности, ограниченный осью OY и лучом OB, численно есть

$$AM = \tanh\psi\,.$$

Изменяя вспомогательный угол φ в интервале $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, можно построить все точки гиперболы. Лучи, соответствующие значениям результирующего угла $\alpha = \pm\pi/4$, являются асимптотами.

<u>Геометрическое сложение гиперболических углов</u>.

Диаграммы скоростей более информативны, если известен геометрический образ суммы гиперболических поворотов; он определяется на рис. 5-3.

Пусть первая гипербола, построенная в координатах X и Y, имеет вершину в точке A, $OA = 1$, а точке B соответствует значение параметра ψ_1, при этом $OK = \cosh\psi_1$, $BK = \sinh\psi_1$. Пусть вторая гипербола построена на луче OB как на радиусе новой окружности радиуса $OB = k$ в координатах X' и Y', точке C соответствует значение параметра ψ_2, при этом $OL/k = \cosh\psi_2$, $LC/k = \sinh\psi_2$, а точке E второй гиперболы, расположенной симметрично относительно оси OY', соответствует значение параметра $-\psi_2$. Эти условия означают, что вокруг одной оси, нормальной плоскости рисунка, произведены два последовательных гиперболических поворота на «углы» ψ_1 и ψ_2. Требуется выяснить, какая точка на первой гиперболе соответствует сумме этих параметров, или, что то же самое, какая длина дуги первой гиперболы эквивалентна длине дуги BC второй гиперболы.

Для выяснения достаточно определить абсциссу точки C второй гиперболы в системе XOY, повернутой относительно системы $X'OY'$ на угол α

$$x_C = x'_C \cos\alpha + y'_C \sin\alpha = \cos\alpha\,(x'_C + y'_C \tan\alpha)\,.$$

---

[52] Интеграл следует из соотношения $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ и параметрической записи (5-32).

Но по построению гипербол

$$x'_C = k\cosh\psi_2\,,\quad y'_C = k\sinh\psi_2\,,\quad \tan\alpha = \tanh\psi_1\,,\quad k\cos\alpha = \cosh\psi_1\,,$$

следовательно

$$x_C = \sinh(\psi_1 + \psi_2)\,.$$

Этой абсциссе на первой гиперболе соответствует точка *D*, ордината которой есть

$$y_C = \cosh(\psi_1 + \psi_2)\,.$$

Симметричной точке *E* второй гиперболы соответствует точка *F* первой гиперболы с координатами

$$x_F = \sinh(\psi_1 - \psi_2)\,,\quad y_F = \cosh(\psi_1 - \psi_2)\,.$$

Это означает, что дуга *BC* второй гиперболы эквивалентна дуге *BD* первой гиперболы и обе они изоморфны значению параметра ψ_2; также эквивалентны дуги *BE* и *BF*, изоморфные значению параметра $-\psi_2$.

В заключение параграфа полезно привести следующее наблюдение, доказательство которого несложно.

> Касательная, проходящая через вершину первой гиперболы (параллельная оси *OX*) всегда является касательной и ко второй гиперболе, при этом дуги гипербол от точки их пересечения до точек касания эквивалентны между собой и изоморфны значению параметра первой гиперболы на вершине второй. На рис. 5-3 отрезок *AG* принадлежит общей касательной, а дуги *AB* и *BG* эквивалентны и изоморфны значению параметра ψ_1.

Этих сведений о единичной гиперболе достаточно для изображения и интерпретации диаграмм скоростей.

Диаграмма скоростей для двух «параллельных» *H*-поворотов.

Для уравнения простого гиперболического поворота (5-29) диаграмма скоростей приведена на рис. 5-4; она требует пояснения. На рисунке символами $\mathbf{p}_1(\Sigma)$ и $\mathbf{q}_2(\Sigma)$ обозначены векторы Q-CO так, как они видны из собственной базы Σ. В точке *A* конца вектора $\mathbf{p}_1(\Sigma)$ находится вершина гиперболы, порожденной в базе Σ. Длина дуги AB соответствует значению параметра первого *H*-вращения ψ_1. Символы $\mathbf{p}_{1'}(\Sigma)$ и $\mathbf{q}_{2'}(\Sigma)$ изображают векторы, составляющие Q-CO Σ', наблюдаемые из базы Σ. Скорость относительного движения Σ'-Σ показана на диаграмме символом $\mathbf{V}_1(\Sigma)$ в масштабе базы Σ, где $OA = 1$; тогда $V_1(\Sigma) = \tanh\psi_1$. Эта часть диаграммы соответствует уравнению (5-25): BQ-вектор $d\mathbf{z}$ направлен вдоль $\mathbf{p}_{1'}(\Sigma)$.

Базой, откуда наблюдаются объекты, может быть и Q-CO Σ'. Тогда, как в любой неподвижной относительно наблюдателя системы отсчета, векторы $\mathbf{p}_{1'}(\Sigma')$ и $\mathbf{q}_{2'}(\Sigma')$ перпендикулярны друг другу и имеют единичную длину. При этом на диаграмме задается новый масштаб $OB = 1$, и для изображения относительного движения используется гипербола

$$y'^2 - x'^2 = 1\,,$$

порожденная в базе Σ'. Бывшая исходная Q-CO Σ теперь движется относительно Σ' со скоростью $V_1(\Sigma')$, проекция которой на $\mathbf{q}_{2'}(\Sigma)$ есть $BF = -\tanh\psi_1$ (дуга *BE* соответствует параметру $-\psi_1$), а вектор временного направления системы Σ виден как $\mathbf{p}_1(\Sigma')$ со своей единицей длины OE.

Оставшаяся часть диаграммы изображает сложение параллельных скоростей, описанное уравнениями (5-30). Q-СО Σ'' движется со скоростью $\mathbf{V}_2(\Sigma')$, $BL = \tanh\psi_2$, дуга BC изоморфна ψ_2, вектор временного направления Σ'' виден из Σ' как $\mathbf{p}_{1''}(\Sigma')$ (вектор пространственного направления $\mathbf{q}_{2''}(\Sigma')$ на диаграмме не показан). Из выведенного выше правила сложения гиперболических «углов» следует, что дуга BD первой гиперболы эквивалентна дуге BC второй гиперболы и изоморфна параметру *H*-вращения ψ_2, следовательно, вектор $\mathbf{p}_{1''}(\Sigma)$, направленный вдоль *OD*, это тот же самый временной направляющий вектор системы Σ'', что и $\mathbf{p}_{1''}(\Sigma')$, но наблюдаемый из исходной Q-СО Σ. Скорость движения Σ'' относительно базы Σ есть $V_{\Sigma''}(\Sigma) \equiv V = AN = \tanh(\psi_1 + \psi_2)$.

Кинематика «непараллельных» поворотов.

Использование уравнений поворота кватернионной релятивистской кинематики существенно упрощает рассмотрение сложных релятивистских кинематических ситуаций. Примером может служить сложение непараллельных скоростей (кстати, такая задача рассмотрена в первой работе А.Эйнштейна, посвященной СТО [65]).

Две Q-СО Σ' и Σ'' движутся относительно базы Σ со скоростями соответственно $V_{\Sigma'}(\Sigma) \equiv V_1$ и $V_{\Sigma''}(\Sigma) \equiv V_2$, направленными друг к другу под углом α (рис.5-5). Требуется определить скорость $V_{\Sigma''}(\Sigma') \equiv V$ системы Σ'', наблюдаемой из Σ'. Пусть векторы $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ лежат в плоскости $\mathbf{q}_2$-$\mathbf{q}_3$ базы Σ так, что $\mathbf{V}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{q}_2$, а α – положительный угол, измеряемый от $\mathbf{V}_1$ к $\mathbf{V}_2$. Тогда Σ' есть результат одного простого *H*-поворота Σ вокруг $\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{3'}$ с параметром ψ_1

$$\Sigma' = H_3^{\psi_1}\,\Sigma, \tag{5-34}$$

при этом $V_1 = \tanh\psi_1$. Для того, чтобы от Σ перейти к Σ'', требуются два простых вращения: (1) R-поворот на угол α вокруг $\mathbf{q}_1$ или $\mathbf{p}_1$ (такой поворот допустим), при этом вектор $\mathbf{q}_{\bar{2}}$ новой (повернутой на угол α) Q-СО $\overline{\Sigma}$ становится параллельным $\mathbf{V}_2$

$$\overline{\Sigma} = R_1^{\alpha}\,\Sigma,$$

и (2) последующий *H*-поворот на «угол» ψ_2 вокруг нового $\mathbf{q}_{\bar{3}} = \mathbf{q}_{3''}$

$$\Sigma'' = H_3^{\psi_2}\,\overline{\Sigma} = H_3^{\psi_2} R_1^{\alpha}\,\Sigma, \tag{5-35}$$

отражающий движение Σ'' относительно $\overline{\Sigma}$ со скоростью $\mathbf{V}_2$.

Из уравнения поворота (5-34) выражается Q-СО Σ

$$\Sigma = H_3^{-\psi_1}\,\Sigma',$$

(матрица обратного преобразования есть транспонированная исходной), и подставляется в уравнение (5-35). Результат есть уравнение поворота, задающее Σ'' как функцию Σ'

$$\Sigma'' = H_3^{\psi_2} R_1^{\alpha} H_3^{-\psi_1}\,\Sigma'. \tag{5-36}$$

В развернутом (матричном) виде уравнение есть

$$\begin{pmatrix}\mathbf{q}_{1''}\\ \mathbf{q}_{2''}\\ \mathbf{q}_{3''}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\psi_2 & i\sinh\psi_2 & 0\\ -i\sinh\psi_2 & \cosh\psi_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\psi_1 & -i\sinh\psi_1 & 0\\ i\sinh\psi_1 & \cosh\psi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{q}_{1'}\\ \mathbf{q}_{2'}\\ \mathbf{q}_{3'}\end{pmatrix},$$

откуда сразу можно найти нужную компоненту $\mathbf{p}_{1''}=i\,\mathbf{q}_{1''}$

$$\mathbf{p}_{1''}=(\cosh\psi_1\,\cosh\psi_2-\cos\alpha\sinh\psi_1\sinh\psi_2)\,\mathbf{p}_{1'}+$$
$$+(\sinh\psi_1\,\cosh\psi_2-\cos\alpha\cosh\psi_1\sinh\psi_2)\,\mathbf{q}_{2'}-\sin\alpha\sinh\psi_2\,\mathbf{q}_{3'}\,. \tag{5-37}$$

Поскольку Σ'' наблюдается из Σ', последнее уравнение эквивалентно записи

$$\mathbf{p}_{1''}=\cosh\psi\,(\,\mathbf{p}_{1'}+V_y\,\mathbf{q}_{2'}+V_z\,\mathbf{q}_{3'}\,)\,, \tag{5-38}$$

где

$$\cosh\psi=dt'/dt''\,,$$

а V_y и V_z суть искомые компоненты скорости относительного движения Σ'' и Σ'. Сравнение уравнений (5-37) и (5-38) дает

$$\cosh\psi=\cosh\psi_1\cosh\psi_2\,(1-\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2)\,,$$

$$V_y=\frac{V_1-V_2\cos\alpha}{1-\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2}\,,\qquad V_z=\frac{V_2\sin\alpha\sqrt{1-V_1^2}}{1-\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2}\,, \tag{5-39}$$

так что

$$V^2=\frac{(V_1-V_2)^2-(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2)^2}{1-\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2} \tag{5-40}$$

(использованы стандартные обозначения для скалярного и векторного произведений).

Видно, что формализм кватернионных уравнений поворота позволяет быстро получить не только выражение для модуля искомой относительной скорости (5-40), но также и для ее компонент (5-39).

Диаграмма скоростей для рассмотренного случая «неплоских» вращений приведена на рис. 5-6. В отличие от схемы на рис. 5-5, отражающей точку зрения наблюдателя из базы Σ, диаграмма скоростей иллюстрирует ситуацию, с общих позиций: по желанию каждая из Q-СО может быть выбрана в качестве базы со своим стандартом длины. На диаграмме базой выбрана система Σ'; ее составляющие векторы $(\mathbf{p}_{1''}\,;\,\mathbf{q}_{2'}\,;\mathbf{q}_{3'})$ задают трехмерное «пространственно-пространственно-временное» сечение шестимерного мира. Порожденный в Σ' гиперболоид и касательный к нему в точке *A* «диск скорости» служат для изображения первого *H*-вращения вокруг $\mathbf{q}_{3'}$. Гиперболическая дуга *AB* изоморфна параметру $-\psi_1$ скорости $-V_1$ (лежащей на диске и антипараллельной $\mathbf{q}_{2'}$) – скорости. С которой Σ наблюдается с Σ'. Далее, $\mathbf{p}_1$ – временной направляющий вектор системы Σ, конец которого служит вершиной нового Σ'-гиперболоида и центром диска скоростей. Следующее – *R*-вращение вокруг $\mathbf{p}_1$ на угол α направляет новый вектор $\mathbf{q}_{\bar{2}}$ вдоль $\mathbf{V}_2$. Последнее *H*-вращение вокруг $\mathbf{q}_{\bar{3}}$ определяет дугу *BC*, изоморфную ψ_2, а, следовательно, – скорость $\mathbf{V}_2$ и вектор $\mathbf{q}_{2''}$ системы Σ'' так, как они наблюдаются из Q-СО Σ'. Проекция точки *C* на Σ'-гиперболоид (отрезок *CD* параллелен *OA*) задает на диаграмме тот же временной вектор $\mathbf{p}_{1''}$ системы Σ'', но наблюдаемый из Σ'. Дуга *AD* Σ'-гиперболоида соответствует значению параметра ψ прямого *H*-вращения от Σ' к Σ'', а искомая скорость относительного движения этих Q-СО **V** находится на Σ'-диске (для компактности габариты гиперболоидов и дисков скоростей ограничены на рисунке максимальными значениями вовлеченных физико-геометрических величин).