М.Л. Фильченков, С.В. Копылов, В.А. Лурье

СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА

Книга третья

ГРАВИТАЦИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Москва
Издательство МГОУ
2007

Фильченков М.Л., Копылов С.В., Лурье В.А.
Современная физика. Книга третья. Гравитация, астрофизика и космология: Учебное пособие.- М.: Изд-во МГОУ, 2007.

Предлагаемое пособие представляет собой третью книгу части IV курса физики МГОУ. Предназначено для студентов заочной формы обучения инженерно-технических специальностей. В нем кратко излагаются основные понятия и законы гравитации, астрофизики и космологии. За каждым разделом следуют сводка основных результатов, а также контрольные вопросы и задачи, которые увязаны с лекционным курсом, являясь его развитием и дополнением. Эти задачи сопровождаются объяснительным текстом, что помогает студентам самостоятельно решать аналогичные задачи из их контрольных работ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

(обязательно ознакомиться)

Заключительная книга части IV курса физики МГОУ «Гравитация, астрофизика и космология» содержит материал в соответствии с действующей программой для высших технических учебных заведений Министерства образования и науки Российской федерации.

Включение в базовый (общий) курс физики гравитации, астрофизики и космологии имеет целью ознакомить студентов инженерно-технических специальностей с последними достижениями не только макро- и микрофизики, но и мегафизики. Это необходимо для формирования современной физической картины мира, которая для студентов-гуманитариев дается в курсе «Концепции современного естествознания».

Понятие о гравитации, знакомо из повседневного опыта, основными проявлениями которой на Земле является вес тел и их свободное падение, а также приливы и отливы. Однако закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном еще в 17 веке, явился результатом проведенного Кеплером анализа наблюдений движения планет вокруг Солнца. Таким образом, мы видим, что само открытие гравитации связано с небесной механикой.

С другой стороны, невозможно говорить о космологии без знания всей иерархии структур материи во Вселенной (планет, звезд, галактик и т.д.), изучаемой астрофизикой.

Вообще не существует чисто астрономических законов, есть только общие физические законы, которым подчиняются вещество, поле и пространство-время в широком диапазоне масштабов микро-, макро - и мегамира.

Поэтому в базовый курс физики совершенно необходимо включить основные представления, понятия и факты, справедливые не только в макромире, но и вне него. Очевидно, что существуют и технические приложения микро - и мегафизики. Это хорошо известные атомная промышленность, микроэлектроника, космические исследования околоземного пространства и Солнечной системы с помощью спутников и ракет.

В силу специфики излагаемого материала, общение студентов с преподавателями будет ограничиваться лекциями и практическими занятиями. После этого студенты проходят собеседование по контрольным работам, сдают экзамен или зачет.

При написании данного пособия использовалась следующая литература.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основной

1. Савельев И.В.. Курс общей физики в 5 тт.- М.: АСТ, 2003-2007.
2. Засов А.В., Постнов К.А. Общая астрофизика.- Фрязино: Век 2, 2006.
3. Лайтман А., Пресс С., Прайс Р., Тюкольски С. – Сборник задач по теории относительности и гравитации.- М.: Мир, 1979.
4. Капитонов И.М. Введение в физику ядра и частиц.- М.: Едиториал УРСС, 2002.
5. Гриб А.А. Концепции современного естествознания. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
6. Сажин М.В. Современная космология в популярном изложении.- М.: Едиториал УРСС, 2002.

Дополнительный

1. Рис. М., Руффини Р., Уилер Дж. Черные дыры, гравитационные волны и космология.- М.: Мир, 1977.
2. Розенталь И.Л. Элементарные частицы и структура Вселенной.- М.: Наука, 1984
3. Новиков И.Д. Как взорвалась Вселенная.- М.: Наука ФМ, 1988.
4. Сурдин В.Г. Рождение звезд.- М.: УРСС, 2001.
5. Клапдор-Клайнгротхаус Г.В., Цюбер К. Астрофизика элементарных частиц. М.: Ред. журн. УФН, 2000.
6. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии.- М.: Едиториал УРСС, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

(лекции и практические занятия)

№ п/п	***Содержание***	***Количество часов***	
		лекции	*практич. занятия*
1	*2*	*3*	*4*
I	***Гравитация*** *1. Ньютоновская теория гравитации. Небесная механика.* *2. Основные принципы общей теории относительности.* *3.Связь общей теории относительности со специальной и с ньютоновской теорией гравитации.* *4. Уравнения гравитационного поля. Уравнения геодезических.* *5.Центрально-симметричные решения.* *6. Классические гравитационные эффекты. Гравитационные волны. Гравитационные линзы.* *Задачи.*		

II	***Астрофизика. Звездная астрономия.*** *7.Физика звезд.* *8. Образование и эволюция звезд.* *9. Белые карлики, нейтронные звезды (пульсары) и черные дыры. Квантовые эффекты.* *10. Структура и динамика Галактики. Межзвездная среда. Магнитные поля. Космические лучи.* *11.Внегалактическая астрономия. Нормальные галактики. Активные ядра галактик. Квазары.* *12.Скопления галактик. Крупномасштабная структура.* *Задачи.*		
III	***Космология*** *13. Космологические модели.* *14. Однородная изотропная Вселенная.* *15. Космологическая постоянная.* *16. Наблюдательная космология. Космологические сценарии.* *17. Ранняя Вселенная. Космомикрофизика. Рождение частиц. Квантовая космология.* *18. Новые структурные уровни материи (калибровочные поля, суперсимметрия, супергравитация, суперструны, браны).* *Задачи*		

Учебное издание

Фильченков Михаил Леонидович
Копылов Сергей Васильевич
Лурье Владимир Александрович

СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА

Книга третья

ГРАВИТАЦИЯ, АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Отв. редактор
Редактор А.Ю. Кузьменко
Компьютерная верстка К.Н. Михайлова

Глава I

ГРАВИТАЦИЯ

§1. Ньютоновская теория гравитации. Небесная механика

В 1687 г. английский физик ***Исаак Ньютон*** опубликовал на латинском языке книгу "*Philosophiae naturalis principia mathematica",* в переводе «Математические начала натуральной философии». Эта книга содержала три закона механики, которые в последствии стали называться законами Ньютона, закон всемирного тяготения [1] и основы дифференциального исчисления.

Закон всемирного тяготения гласит: ***между всеми телами существует сила притяжения***

$$F_g = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

где ***гравитационная постоянная*** $G = 6,672 \cdot 10^{-11} нм^2/кг$,
m_1 – масса тела 1, m_2 – масса тела 2, r – расстояние между телами.
Знак минус означает, что направление радиуса вектора, проведенного из точки 1 в точку 2, противоположно направлению вектору силы притяжения, действующей на тело 2 со стороны тела 1 (см. рис).
Если сравнить закон всемирного тяготения с ***законом Кулона***

$$F_e = \frac{q_1q_2}{r^2}, \tag{1.2}$$

где q_1– заряд тела 1, q_2 – заряд тела 2, то мы видим, что одноименные заряды дают знак плюс, соответствующий отталкиванию, а разноименные – знак минус, означающий притяжение. Таким образом, несмотря на одинаковую зависимость от расстояния, законы (1.1) и (1.2) отличаются тем, что при взаимодействии зарядов возможно как притяжение, так и отталкивание, а ***при взаимодействии масс возможно только притяжение.***

Легко видеть, что при взаимодействии между двумя частицами, имеющими заряд электрона и одинаковые массы, кулоновская сила превышает ньютоновскую, если масса частицы меньше, чем $\frac{e}{\sqrt{G}} = 2,55 \cdot 10^{-9} кг$. Поэтому ***гравитацией пренебрегают при рассмотрении взаимодействий элементарных частиц***. С другой стороны для частиц с массой, превышающей указанную величину,

---

[1] ***Тяготение и гравитация*** - это одно и тоже.

ньютоновская сила будет превышать кулоновскую. Поэтому ***для макротел, которые к тому же электронейтральны, основную роль играет гравитация.***

Движение небесных тел, подчиняющихся закону всемирного тяготения, рассматривается в разделе астрономии, получившем название ***небесной механики***. Именно из наблюдений движения небесных тел и был выведен закон всемирного тяготения.

Следует подчеркнуть большую роль астрономии в становлении физической картины мира. В эпоху Возрождения ***Коперник*** возродил известную еще ***Аристарху Самосскому*** (III в. до н.э.) идею о ***гелиоцентрической системе мира***, опубликовав в 1543 г. на латинском языке книгу "*De revolutionibus*", в переводе «О движении небесных сфер». Анализируя наблюдения ***Тихо Браге*** (1546-1601), ***Кеплер*** в 1609-1619 гг. открыл ***три закона движения планет вокруг Солнца.***

1. Планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Заметим, что из третьего закона Кеплера легко получить закон всемирного тяготения (см. ниже задачи).

Остановимся теперь на свойстве всех тел падать в поле тяготения с одинаковым ускорением, обнаруженном экспериментально еще ***Галилеем***. Согласно второму закону Ньютона

$$F = m_i a_i, \tag{1.3}$$

где m_i - ***инертная масса*** тела, a_i – ускорение. С другой стороны вес тела

$$P = m_g g_З, \tag{1.4}$$

где m_g – ***гравитационная масса*** тела, $g_З$ – ***ускорение свободного падения*** на поверхности Земли. При падении на тело действует сила, равная ее весу, а ускорение равно $g_З$ (независимо от его массы). Отсюда получаем, что $m_i = m_g$, т.е. ***инертная масса равна гравитационной*** и ниже будет обозначаться m.

Рассмотрим подробнее движение планет вокруг Солнца. Второй закон Кеплера означает постоянство секториальной скорости $\dot{f}$, т.е. площади, описываемой радиусом-вектором в единицу времени. Он выражает ***закон сохранения орбитального момента*** планеты при движении вокруг Солнца

$$J = 2m\dot{f}\ ,\qquad (1.5)$$

где m - масса планеты. Интегрируя (1.5) по времени, получаем:

$$TJ = 2mf\ ,\qquad (1.6)$$

где T - ***период обращения планеты вокруг Солнца***, f - площадь эллипса. ***Траектория движения тела в поле тяготения задается уравнением для конического сечения***

$$e\cos\varphi = \frac{p}{r} - 1,\qquad (1.7)$$

где ***эксцентриситет***

$$e = \sqrt{1 + \frac{2J^2E}{G^2M^2m^3}}\ ,\qquad (1.8)$$

и ***параметр орбиты***

$$p = \frac{J^2}{GMm^2}\ .\qquad (1.9)$$

В этих формулах M - масса центра тяготения, E - энергия тела.
В зависимости от эксцентриситета конические сечения делятся: на ***эллипс*** при $e < 1$ ($E < 0$), ***параболу*** при $e = 1$ ($E = 0$) и ***гиперболу*** при $e > 1$ ($E > 0$). ***Большая полуось эллипса***

$$a = \frac{p}{1 - e^2}\ .\qquad (1.10)$$

Малая полуось эллипса

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}\ .\qquad (1.11)$$

Площадь эллипса

$$f = \pi ab\ .\qquad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.6), используя формулы (1.9) – (1.11) и сокращая левую и правую части на J, получаем третий закон Кеплера в виде

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}\qquad (1.13)$$

Рассмотрим вопрос о т.н. ***космических скоростях*** для космических аппаратов, запускаемых с Земли. Скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно стало спутником Земли, называется ***первой космической скоростью*** v_1. Она получается, приравнивая ***центробежную силу***, действующую на тело на поверхности Земли,

$$F = \frac{mv_1^2}{R_З}\qquad (1.14)$$

где $R_З$ – ***радиус Земли***, весу тела, и равна

$$v_1 = \sqrt{g_З R_З}\ .$$

(1.15)

Скорость, которую нужно сообщить телу для того, что бы оно перешло на параболическую траекторию, т.е. вышло из сферы земного притяжения, называется ***второй космической скоростью*** v_2. Она находится из условия $E=0$, которое запишется как

$$\frac{mv_2^2}{2}-\frac{GM_З}{R_З}=0, \qquad (1.16)$$

где $M_З$ – ***масса Земли***, а второй член в формуле (1.16) есть потенциальная энергия тела на поверхности Земли. Учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Земли равно

$$g_З=\frac{GM_З}{R_З^2} \qquad (1.17)$$

получаем следующее выражение для второй космической скорости

$$v_2=\sqrt{2g_З R_З} \qquad (1.18)$$

Скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно покинуло Солнечную систем, называется ***третьей космической скоростью*** v_3. Она, как и в предыдущем случае, находится из условия $E=0$, которое теперь запишется так

$$\frac{mv_3^2}{2}-\frac{GM_C m}{a_З}=0 \qquad (1.19)$$

где M_C – ***масса Солнца***, $a_З$ – ***большая полуось земной орбиты***, равная среднему расстоянию от Земли до Солнца, которая называется ***астрономической единицей***. В результате третья космическая скорость при запуске перпендикулярно движению Земли вокруг Солнца равна

$$v_3=\sqrt{\frac{2GM_C}{a_З}} \qquad (1.20)$$

При запуске в направлении движения Земли вокруг Солнца нужно вычесть, а при запуске в противоположном направлении прибавить скорость Земли, равную 30 км/с. Вставляя константы $M_З=5{,}98\cdot10^{24}\,кг$, $M_C=1{,}99\cdot10^{30}\,кг$, $R_З=6{,}37\cdot10^{6}\,м$, $a_З=1{,}50\cdot10^{11}\,м$, получаем: $v_1=7{,}9\,км/с$, $v_2=11{,}2\,км/с$, $v_3=42\,км/с$, $g=9{,}81\,м/с^2$.

В заключении отметим, что поскольку сила F связана с потенциальной энергией U соотношением

$$\mathbf{F}=-\nabla U, \qquad (1.21)$$

то ***потенциальная энергия центрально-симметричного гравитационного поля***

$$U_g=-\frac{GMm}{r}. \qquad (1.22)$$

Вблизи поверхности Земли эту формулу можно переписать с учетом того, что $r=R_З+h$, где h - высота над поверхностью Земли, и $\frac{h}{R_З}\ll 1$ в виде

$$U_g = -\frac{GM_З m}{R_З} + mg_З h \qquad (1.23)$$

Вводя начало отсчета потенциальной энергии не от центра Земли, а от земной поверхности, получаем знакомое еще из курса элементарной физики выражение для потенциальной энергии тела в однородном гравитационном поле Земли вблизи ее поверхности:

$$U_З = mg_З h, \qquad (1.24)$$

которое связано с U_g соотношением

$$U_З = U_g + \frac{GM_З m}{R_З}. \qquad (1.25)$$

С другой стороны, U_g выражается через ***потенциал гравитационного поля*** φ_g как

$$U_g = m\varphi_g. \qquad (1.26)$$

Потенциал гравитационного поля удовлетворяет ***уравнению Пуассона***

$$\Delta\varphi_g = 4\pi G\rho, \qquad (1.27)$$

где ρ – ***плотность*** массы.

Напряженность центрально-симметричного гравитационного поля равна ускорению, сообщаемому пробному телу

$$g = -\frac{GM}{r^2}, \qquad (1.28)$$

где M – масса центра тяготения.

В силу того, что размеры Земли конечны, гравитационное притяжение Луны и Солнца в разных точках Земли различно. За счет этого возникают лунные и солнечные ***приливы и отливы***. При приливе ускорение относительно центра Земли равно

$$\frac{GM}{\left(r - R_З\right)^2} - \frac{GM}{r^2} = \frac{2GM}{r^3} \qquad (1.29)$$

где M - масса Луны или Солнца, r - расстояние от Земли до Луны или Солнца. Лунные приливы достигают десятка метров. Солнечные приливы и отливы наблюдаются на фоне лунных. Во время новолуний и полнолуний лунные и солнечные приливы складываются, а во время первой и последней четверти вычитаются. Отношение ускорения лунного прилива к солнечному дается формулой

$$\frac{M_Л}{M_С}\left(\frac{a_З}{r_Л}\right)^3 \approx 2, \qquad (1.30)$$

где масса Луны $M_Л = 7,34 \cdot 10^{22}\,кг$, расстояние от Земли до Луны $r_Л = 3,84 \cdot 10^{8}\,м$.

§ 2. Основные принципы общей теории относительности

Общая теория относительности (ОТО), созданная ***А. Эйнштейном*** в 1916 г., обобщает ***специальную теорию*** *относительности* (СТО) (см. соответствующие разделы механики) на область гравитационных явлений.

Используемый в СТО ***интервал***

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \qquad (2.1)$$

где $c = 3 \cdot 10^8 \, м/с$ - скорость света, в псевдоевклидовом ***пространстве Минковского*** с метрикой $g_{ik}(1,-1,-1,-1)$, обобщается в ОТО на интервал

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad (2.2)$$

в пространстве Римана с метрикой g_{ik}, зависящей от ***координат*** x^i, где $i = 0,1,2,3$. Поэтому ***риманово пространство является искривленным***. ***Метрика*** g_{ik} ***обобщает ньютоновский потенциал*** φ_g***, сводя гравитацию к геометрии пространства-времени.***

В ОТО постулируется ***общий принцип относительности***, согласно которому все физические законы имеют одинаковую форму в любой системе отсчета. Общий принцип относительности обобщает ***принцип относительности Эйнштейна***, справедливый в СТО, согласно которому все законы физики имеют одинаковую форму в ***инерциальных системах отсчета***. Переход от одной инерциальной системы к другой осуществляется с помощью ***преобразований Лоренца***

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \; y = y', \; z = z', \; t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (2.3)$$

где x, y, z, t - координаты и время в системе отсчета K, а x', y', z', t' - координаты и время в системе отсчета K', которая движется относительно K со скоростью V. В классической механике принцип относительности Эйнштейна переходит в ***принцип относительности Галилея***, а преобразования Лоренца в ***преобразования Галилея***

$$x = x' + Vt, \; y = y', \; z = z', \; t = t'. \qquad (2.4)$$

В ОТО также постулируется ***принцип эквивалентности***, который гласит. ***Любая неинерциальная (т.е. ускоренная)***

система отсчета локально эквивалентна некоторому гравитационному полю. В ньютоновской теории принцип эквивалентности также справедлив в силу равенства напряженности гравитационного поля ускорению, а гравитационной массы инерционной. Следствием этого принципа является ***возможность устранения однородного поля тяготения в бесконечно малом объеме пространства равномерно ускоренной системы отсчета***. Например, ***при свободном падении лифта возникает невесомость*** за счет компенсации силы тяготения ***силой инерции***, т.к. свободно падающий лифт представляет собой ***неинерциальную систему*** отсчета, в которой на тело с массой m, помимо веса mg, действует сила инерции $-mg$. ***Исключение гравитационного поля означает переход в локально-инерциальную систему отсчета, в которой справедлива СТО***.

§ 3. Связь общей теории относительности со специальной и с ньютоновской теорией гравитации

Обобщим некоторые формулы СТО и ньютоновской теории гравитации на ОТО, учитывая, что в ОТО гравитация является лишь проявлением искривления пространства-времени и задается римановой метрикой g_{ik}.

Из специальной теории относительности известна формула для энергии свободной частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}, \tag{3.1}$$

m - масса частицы, v - ее скорость.

Обобщим формулу (3.1) на случай ***движения частицы в гравитационном поле***, умножив ее на $\sqrt{g_{00}}$, а величину g_{00} определим из условия совпадения ***энергии***, полученной из формулы

$$E = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}, \tag{3.2}$$

с энергией нерелятивистской частицы, движущейся в ньютоновском гравитационном поле с потенциалом φ_g.

Легко показать (см. ниже задачи), что полагая

$$g_{00} = 1+\frac{2\varphi_g}{c^2}, \tag{3.3}$$

получаем

$$E - mc^2 = \frac{m\text{v}^2}{2} + m\varphi_g\,. \qquad (3.4)$$

Формула СТО для ***собственного времени*** τ

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{\text{v}^2}{c^2}} \qquad (3.5)$$

обобщается на ОТО следующим образом:

$$d\tau = dt\sqrt{g_{00}}\sqrt{1 - \frac{\text{v}^2}{c^2}} \qquad (3.6)$$

Формула СТО для ***эффекта Доплера***, описывающего изменение частоты при движении источника со скоростью v относительно наблюдателя,

$$\omega_н = \frac{\omega_и\sqrt{1 - \frac{\text{v}^2}{c^2}}}{1 - \frac{\text{v}}{c}\cos\theta}\,, \qquad (3.7)$$

где $\omega_н$ - частота наблюдателя, $\omega_и$ - частота источника, θ - угол между направлением луча света и направлением на источник,
переходит в формулу ОТО для ***эффекта Эйнштейна-Доплера***, описывающего изменение частоты при движении источника со скоростью v в гравитационном поле g_{00} относительно наблюдателя

$$\omega_н = \frac{\omega_и\sqrt{g_{00}}\sqrt{1 - \frac{\text{v}^2}{c^2}}}{1 - \frac{\text{v}}{c}\cos\theta}\,. \qquad (3.8)$$

Из формулы (3.8) при $\text{v} = 0$ получаем формулу для ***гравитационного красного смещения***

$$\omega_н = \omega_и\sqrt{g_{00}}\,. \qquad (3.9)$$

частоты в гравитационном поле.
Таким образом, ОТО переходит в СТО при $g_{00} = 1$ или $\varphi_g = 0$, а в ньютоновскую теорию гравитации при $\frac{\text{v}^2}{c^2} \ll 1$ и $\frac{\varphi_g}{c^2} \ll 1$.

§ 4. Уравнения гравитационного поля. Уравнения геодезических

Потенциал ньютоновской теории гравитации φ_g, удовлетворяющий уравнению Пуассона (1.27), в ОТО заменяется на метрику g_{ik} искривленного пространства-времени, которая является решением ***уравнений Эйнштейна-Гильберта*** (1916 г.)

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}\,, \qquad (4.1)$$

где ***тензор Риччи***

$$R_{ik}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^k_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\,, \qquad (4.2)$$

выраженный через ***символы Кристоффеля***

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{x^m}\right) \qquad (4.3)$$

и равный

$$R_{ik}=g^{ml}R_{milk}\,, \qquad (4.4)$$

где R_{milk} - ***тензор кривизны***,

скалярная кривизна

$$R=g^{ik}R_{ik}\,, \qquad (4.5)$$

T_{ik} - ***тензор энергии-импульса***, удовлетворяющий закону сохранения

$$T^{ik}_{;k}=0\,, \qquad (4.6)$$

обобщающему ***закон сохранения энергии-импульса*** в СТО

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}=0\,. \qquad (4.7)$$

Откуда

$$P^i=const\int T^{ik}dS_k=inv\,, \qquad (4.8)$$

где dS_k - элемент гиперповерхности в направлении оси k.

Символ ; означает ковариантное дифференцирование, определяющее изменение тензора или вектора при параллельном переносе в искривленном пространстве-времени.

Например, ковариантная производная вектора A^i есть

$$A^i_{;k}=\frac{\partial A^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kl}A^l\,, \qquad (4.9)$$

а ковариантная производная тензора A^{ik} имеет вид

$$A^{ik}_{;l}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ml}A^{mk}+\Gamma^k_{ml}A^{im}\,. \qquad (4.10)$$

Таким образом, символы Кристоффеля, называемые также коэффициентами связности, отвечают за ту часть этого изменения, которая обусловлена искривлением пространства-времени. Очевидно, что пространстве Минковского $\Gamma^i_{kl}=0$, и ковариантная производная совпадает с частной. Из формулы (4.3) видно, что ***символы Кристоффеля, являясь комбинацией частных производных от метрического тензора, имеют смысл напряженности гравитационного поля***, аналогично тому, как в ньютоновской теории гравитации напряженность гравитационного поля

$$\mathbf{g}=-\nabla\varphi_g\,. \qquad (4.11)$$

Условием того, что в свободно падающей системе отсчета локально справедлива СТО, является $\Gamma^{i}_{kl} = 0$, которое и означает компенсацию гравитационного поля силой инерции. Локальность справедливости СТО означает, что производные от символов Кристоффеля, т.е. вторые производные от метрики, не равны нулю, а следовательно тензор кривизны $R_{iklm} \neq 0$. Поэтому ***кривизну пространства нельзя исключить с помощью принципа эквивалентности***.

Уравнения (4.1) называют также уравнениями гравитационного поля. Они обобщают уравнения Пуассона ньютоновской теории гравитации. ***Геометрия пространства-времени не задана*** (левая часть уравнения***), а определяется материей*** (правая часть уравнения). Закон сохранения (4.4) следует из (4.1) автоматически, т.к. левая часть (4.1) выбрана так, чтобы ее ковариантная производная равнялась нулю.

Интервал может быть выражен не только через ковариантный метрический тензор g_{ik} (который мы называли метрикой) но и через контравариантный g^{ik}

$$ds^2 = g^{ik} dx_i dx_k \tag{4.12}$$

Уравнения Эйнштейна-Гильберта являются нелинейными, поэтому содержат в себе и уравнения движения. Они быть получены из закона сохранения (4.4). Уравнение движения материальной точки в гравитационном поле имеют вид

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^{i}_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0\,. \tag{4.13}$$

Они называются ***уравнением геодезических***, т.е. наикратчайших линий в римановом пространстве. В ньютоновской теории гравитации, т.е. при $k = l = 0$, (4.11) сводится к уравнению

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -c^2 \Gamma^{\alpha}_{00}\,, \tag{4.14}$$

совпадающему с (4.9) при

$$\Gamma^{\alpha}_{00} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_g}{\partial x^\alpha}\,, \tag{4.15}$$

где $\alpha = 1,2,3$.

Движение материальной точки под влиянием одного только гравитационного поля может рассматриваться как свободное движение в искривленном пространстве-времени, т.е. происходящее без воздействия сил. Само гравитационное поле может вообще не вводиться в теорию, а рассматриваться только как свойство пространства-времени, определяемое движущееся материей, состоящей и вещества, т.е. масс, и полей, обусловленных электромагнитным, сильным и слабым взаимодействиями.

§ 5. Центрально-симметричные решения

Одним из первых точных решений уравнений Эйнштейна-Гильберта является решение для точечной массы, создающей ***центрально-симметричное гравитационное поле***, полученное ***К. Шварцшильдом*** в 1916 г. ***Метрика Шварцшильда*** в сферических координатах r, θ, φ имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \qquad (5.1)$$

где ***гравитационный радиус*** (или ***горизонт событий***)

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \qquad (5.2)$$

M - масса центра тяготения.

Формула для гравитационного радиуса (5.2) была получена еще ***Лапласом*** в 1799 г. из простых соображений. Условие того, что тело с массой m покидает область притяжения центра тяготения с массой M, т.е. переходит на параболическую траекторию с энергией $E = 0$, имеет вид

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{GMm}{r}. \qquad (5.3)$$

Это тело достигает скорости $\mathrm{v} = c$ на расстоянии $r = r_g$.

Для статической центрально-симметричной метрики справедливо соотношение

$$g_{rr} = -\frac{1}{g_{00}}. \qquad (5.4)$$

Выражение для метрики Шварцшильда может быть получено из формул (1.22), (1.26), (3.3), (5.2) и (5.4) (см. ниже задачи).

Метрика Шварцшильда имеет две особенности, т.е. точки в которых расходятся компоненты метрики. При $r = 0$ расходится компонента g_{00}, а также ***инвариант кривизны*** $R_{iklm}R^{iklm} \propto \frac{1}{r^6}$. Эта особенность называется истинной ***сингулярностью***. При $r = r_g$ расходится компонента g_{rr}, но кривизна остается конечной. Поэтому ***преобразованием координат особенность на горизонте событий может быть устранена.***

Для того чтобы выяснить смысл горизонта событий r_g, найдем мировую линию света, распространяющегося по радиусу в римановом пространстве, описываемом метрикой Шварцшильда (иногда говорят просто « в поле Шварцшильда»). Полагая в (5.1) $ds^2 = 0$, $d\theta = d\varphi = 0$,

найдем ***мировую линию света***

$$t = \pm\frac{1}{c}\int\frac{dr}{1-\frac{r_g}{r}} = \pm\left(\frac{r}{c}+\frac{r_g}{c}\ln\left|\frac{r}{r_g}-1\right|\right) \qquad (5.5)$$

Из (5.5) видно, что ***при приближении к горизонту событий время для внешнего наблюдателя становится бесконечным***. Это означает, что область значений радиальной координаты $r < r_g$ оказывается недоступной для внешнего наблюдателя (см. ниже черные дыры). Под горизонтом, т.е. при $r < r_g$, компоненты метрики меняют знак, а именно: g_{00} становится отрицательной, а g_{rr} положительной. Координата r становится времениподобной, а время t пространственно-подобным. Метрика под горизонтом нестационарна, т.е. зависит от времени, роль которого играет координата r. Это означает ***невозможность существования тел с радиусом меньшим радиуса Шварцшильда.***

Рассмотрим движение тел с конечной массой покоя m в поле Шварцшильда. ***При движении в центральном поле сохраняются энергия*** E***,*** даваемая формулой (3.2), и ***угловой момент*** J, формулу для которого получим, обобщая формулу (1.5) ньютоновской теории. Действительно формула $J = 2m\dot{f}$ с учетом $\dot{f} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{d\tau}$ и формулы (3.6) для $d\tau$ (см. ниже задачи) принимает вид:

$$J = \frac{mr^2}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (5.6)$$

Движение происходит в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$. Исключая из формул (3.2) и (5.6) v,
получаем следующие выражения для ***закона движения***

$$t = \frac{1}{c}\int\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1-\left(m^2c^2+\frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{c^2}{E^2}}} \qquad (5.7)$$

и ***траектории*** тела

$$\varphi = \frac{Jc}{E}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{1-\left(m^2c^2+\frac{J^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{c^2}{E^2}}}$$

(5.8)

в поле Шварцшильда.

Энергия $E < mc^2$ ***соответствует финитному движению*** по незамкнутой кривой, представляющей собой эллипс с вековым смещением перигелия орбиты (см. ниже смещение перигелия Меркурия). В ньютоновском пределе ***энергия*** $E = 0$ ***соответствует движению по параболе***, а ***энергия*** $E > mc^2$ ***по гиперболе***.

Заметим, что формулы (5.7) и (5.8) справедливы и при $m = 0$, т.е. для света. В случае радиального движения $J = 0$, и мы возвращаемся к формуле (5.5). Если свет движется не по радиусу, то имеет место формула:

$$J = \frac{\rho_c E}{c}, \qquad (5.9)$$

где ρ_c - ***прицельный параметр***.

Используя (3.3) и (3.4), т.е. в случае слабых полей и медленных движений, можно свести формулы (5.7) и (5.8) к соответствующим выражениям в ньютоновской теории гравитации.

§ 6. Классические гравитационные эффекты. Гравитационные волны. Гравитационные линзы

Классическими эффектами ОТО принято считать:

а) ***гравитационное красное смещение*** линий в спектре Солнца,

б) ***отклонение луча света*** при прохождении вблизи диска Солнца,

в) ***смещение перигелия Меркурия***.

а) Из формулы (3.9) для гравитационного красного смещения следует, что относительное ***смещение частоты***

$$\frac{\omega_н - \omega_и}{\omega_и} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} - 1 . \qquad (6.1)$$

Учитывая, что $r_g \ll r$, имеем

$$\frac{\omega_н - \omega_и}{\omega_и} = -\frac{r_g}{2r} . \qquad (6.2)$$

Подставляя в (6.2) массу и радиус Солнца $r_g = \frac{2GM_C}{c^2}$ и $r = R_C$, получаем

$$\frac{\omega_н - \omega_и}{\omega_и} = -\frac{GM_C}{c^2 R_C} = -2{,}12 \cdot 10^{-6} , \qquad (6.3)$$

где радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^8 \, м$. Это значение для смещения частоты подтверждено астрономическими наблюдениями с точностью до 10%.

б) ***Отклонение луча света*** можно вычислить, исходя из (5.8) и (5.9), по формуле

$$\Delta\varphi_л = 2\,|\,\varphi(\rho_c) - \varphi(\infty)\,| - \pi . \qquad (6.4)$$

В результате получаем

$$\Delta\varphi_л = \frac{2r_g}{\rho_c} \qquad (6.5)$$

При прохождении луча света по краю диска Солнца $\rho_c = R_C$, и отклонение луча в радианах

$$\Delta\varphi_л = \frac{4GM_C}{c^2 R_C} = 1{,}75'' . \qquad (6.6)$$

При наблюдении солнечного затмения в 1919 г. ***А. Эддингтон*** для отклонения луча получил значение, согласующееся с (6.5) в пределах 10%. Этот результат явился первым весомым аргументом в пользу ОТО.

в) ***Смещение перигелия планеты*** также можно вычислить, используя (5.8) и (5.9), по формуле

$$\Delta\varphi_п = 2\,|\,\varphi(r_+) - \varphi(r_-)\,| - 2\pi , \qquad (6.7)$$

где r_+ и r_- - расстояния планеты от Солнца в ***афелии*** и ***перигелии*** соответственно.

В результате получаем смещение в радианах на один оборот

$$\Delta\varphi_п = \frac{3\pi r_g}{p} , \qquad (6.8)$$

где p - параметр орбиты, который вычисляется по формуле (1.10).

Смещение перигелия Меркурия обычно вычисляется за столетие, когда Меркурий успевает совершить 415 оборотов вокруг Солнца.

Окончательно получаем следующую формулу для векового смещения перигелия Меркурия:

$$\Delta\varphi_M = \frac{2490\pi G M_C}{c^2\left(1-e_M^2\right)a_M} = 43,03'', \tag{6.9}$$

где эксцентриситет Меркурия $e_M = 0,206$, большая полуось Меркурия $a_M = 5,79\cdot 10^{10}\,м$. Значения векового смещения перигелия Меркурия (6.9), согласуется с наблюдениями с точностью порядка 1%.

Сравнивая формулы для классических эффектор ОТО, легко видеть, что все они безразмерны и имеют одинаковую структуру, а именно по порядку величины равны отношению гравитационного радиуса центра тяготения к характерному размеру системы.

Ускоренно движущиеся массы излучают гравитационные волны в ОТО аналогично тому как в ускоренные заряды излучают электромагнитные волны в электродинамике. Однако при рассмотрении гравитационных волн мы сталкиваемся с проблемой энергии гравитационного поля в ОТО. Она состоит в следующем. Поскольку закон сохранения согласно (4.6) может быть переписан в виде (4.10)

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}T^{mk} + \Gamma^k_{ml}T^{im} = 0 \tag{6.10}$$

Из (4.7), (4.8) следует, что сохраняется 4-импульс материи. Из (6.10) следует, что сохраняется не 4-импульс, соответствующий тензору энергии-импульса материи T^{ik}, входящему в уравнение Эйнштейна-Гильберта, а 4-импульс материи вместе с гравитационным полем, которое описывается вторым и третьим членами. (6.10) иногда записывают в виде

$$\frac{\partial\left(T^{ik}+t^{ik}\right)}{\partial x^k} = 0. \tag{6.11}$$

где t^{ik} ***- псевдотензор гравитационного поля***, который не может быть определен однозначно и зависит от выбора системы отсчета. Введение псевдотензора в ОТО противоречит общему принципу относительности (см. § 2). Псевдотензор t^{ik} не входит в уравнение Эйнштейна-Гильберта, т.к. он не приводит к искривлению пространства-времени. В силу принципа эквивалентности, всегда можно найти систему отсчета, в которой отсутствует гравитационное поле***. Если гравитационное поле есть только проявление геометрии, а не материи, то бессмысленно вводить понятие его энергии, т.к. не существует локальной плотности***

энергии гравитационного поля. Непреодолимые с момента создания ОТО трудности с определением энергии гравитационного поля носят принципиальный характер. Нерешенность проблемы энергии гравитационного поля в ОТО естественно вызывает трудности и с определением энергии гравитационных волн. Тем не менее, ***оказывается возможным определить глобально энергию гравитационных волн, излучаемых в замкнутой системе, не используя псевдотензор***.

Слабые гравитационные волны обычно рассматриваются на фоне пространства Минковского. Метрика в этом случае имеет вид

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} . \tag{6.12}$$

где $|h_{ik}| \ll |\eta_{ik}|$, метрика Минковского $\eta_{ik}(1,-1,-1,-1)$, h_{ik} - метрика гравитационной волны, которая может рассматриваться как ***тензорное поле в плоском пространстве***. Воспользуемся аналогией с электродинамикой. В случае гравитации масса совпадает с гравитационным зарядом, поэтому ***дипольное излучение отсутствует. Гравитационные волны*** также как и электромагнитные ***поперечны***. ***Квадрупольное гравитационное излучение представляет собой поток квантов со спином 2 в силу того, что описывается тензором.*** Интенсивность гравитационного излучения может быть получена из интенсивности квадрупольного электрического излучения, исходя из аналогии между законом Кулона (1.2) и законом всемирного тяготения (1.1). Если заменить заряд q на массу $m\sqrt{G}$, в выражении для электрического квадрупольного момента и спин электромагнитного поля равный 1 на спин гравитационного поля равный 2, то можно получить ***формулу Эйнштейна для интенсивности излучения гравитационных волн***:

$$I = \frac{G}{5c^5} \dddot{D}_{\alpha\beta} \dddot{D}^{\alpha\beta} , \tag{6.13}$$

где ***квадрупольный момент*** излучающей системы

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} r^2 \right) dV , \tag{6.14}$$

$\alpha, \beta = 1,2,3.$

Несмотря на многочисленные попытки обнаружить гравитационные волны от астрономических объектов с помощью существующих детекторов, в настоящее время нет прямых доказательств их существования. Однако ***имеются достаточно надежные косвенные астрономические данные***, ***свидетельствующие в пользу реальности гравитационных волн***. Обнаружено ускорения взаимного вращения для нескольких двойных звезд из-за потери энергии на гравитационное излучение, приводящее к уменьшению размеров их орбит и, следовательно, к уменьшению орбитального периода вращения. В частности, результаты, полученные ***Дж. Тейлором*** в 1991 г., по уменьшению орбитального периода пульсара PSR 1913+16 дали значение 76±0,3 мкс в год, что отличается от предсказанного ОТО значения 75,8 мкс в год, обусловленного потерями на гравитационное излучение, менее чем на 1%. В 1993 г. Р. Халсу и Дж. Тейлору была присуждена Нобелевская премия по физике « за открытие нового типа пульсаров, давшее новые возможности в изучении гравитации».

В заключение этой главы рассмотрим ***эффект гравитационной фокусировки***, состоящий в отклонении луча света от далекого источника гравитирующим объектом, который называется ***гравитационной линзой***. Если источник, гравитационная линза и наблюдатель находятся на одной прямой, то изображение источника для наблюдателя, находящегося в ***фокальной плоскости***, будет иметь форму кольца с ***радиусом Эйнштейна-Хвольсона***

$$R_E = \sqrt{\frac{2r_g D_л D_{ли}}{D_и}}, \qquad (6.15)$$

где r_g - гравитационный радиус линзы, $D_л$ - расстояние до линзы, $D_и$ - расстояние до источника, $D_{ли}$ - расстояние от линзы до источника.

Угол, под которым виден радиус R_E

$$\theta_E = \frac{R_E}{D_л}. \qquad (6.16)$$

Поскольку $\theta_E \ll 1$ имеем

$$D_и = D_л + D_{ли}. \qquad (6.17)$$

Если $D_л \ll D_и$, то

$$R_E = \sqrt{2r_g D_л} \qquad (6.18)$$

и

$$\theta_E = \sqrt{\frac{2r_g}{D_л}}. \qquad (6.19)$$

Сравнивая (6.19) с (6.5), мы находим, что $R_E = \rho_c$, если $\Delta\varphi_л = \theta_E$.

Таким образом, мы приходим к формуле

$$\theta_E = \frac{2r_g}{\rho_c}, \qquad (6.20)$$

аналогичной (6.5), хотя последняя формула справедлива для отклонения луча в гравитационном поле Солнца, которое наблюдается с Земли, находящейся вне фокальной плоскости гравитационной линзы, образуемой Солнцем. Это еще раз подтверждает сделанные ранее вывод о том, что все формулы для гравитационных эффектов имеют одинаковую структуру.

Гравитационными линзами могут быть различные астрономические объекты: звезды, планеты, галактики, скопления галактик и т.п. Величины углов отклонений луча θ_E при гравитационной фокусировке зависят от массы гравитационной линзы. Значения этих углов меняются в широком диапазоне: от $(10^{-9})''$ - для планет до $(10^{3})''$ - для скоплений галактик. Если гравитационная линза – это одна из ближайших галактик с массой $M = 10^{12} M_C$, удаленная на расстояние $D_л = 100$ кпс, то $\theta_E = 200''$. Первая гравитационная линза была обнаружена ***Д. Волшем*** в 1979 г. при наблюдении квазара QSO 0957 + 561. К настоящему времени обнаружено несколько десятков гравитационных линз.

Сводка основных результатов и понятий (§§ 1-6)

1. Закон всемирного тяготения: между любыми двумя телами существует сила притяжения, пропорциональная произведению их масс и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Коэффициент пропорциональности называется гравитационной постоянной
   $G = 6,672 \cdot 10^{-11} нм^2/кг$.
2. Законы движения планет вокруг Солнца.
   I закон Кеплера: планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится Солнце.
   II закон Кеплера: радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади.
   III закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.
3. Инертная масса равна гравитационной.
4. Напряженность гравитационного поля равна ускорению, сообщаемому пробному телу.
5. Общая теория относительности (ОТО) обобщает специальную теорию относительности на область гравитационных явлений и ньютоновскую теорию гравитацию на область релятивистских явлений.
6. Основные принципы ОТО.
   а) Геометрия пространства-времени не задана, а определяется распределением и движением материи.
   б) Общий принцип относительности: все физические законы имеют одинаковую форму в любой системе отсчета.
   в) Принцип эквивалентности: любая неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

7. Уравнениями гравитационного поля в ОТО являются уравнения Эйнштейна-Гильберта, определяющие метрику пространства-времени.
8. Уравнение движения материальной точки в гравитационном поле называются уравнением геодезических, по которым происходит свободное движение в искривленном пространстве-времени.
9. Решением уравнений Эйнштейна-Гильберта для точечной массы является метрика Шварцшильда.
10. Классические гравитационные эффекты.
    а) Гравитационное красное смещение.
    б) Отклонение луча света, в том числе гравитационная фокусировка.
    в) Смещение перигелия Меркурия.
11. Ускоренно движущиеся массы излучают гравитационные волны.

Контрольные вопросы и задачи к §§ 1-6

1. Чем отличается закон всемирного тяготения от закона Кулона?
2. Почему гравитационным взаимодействием пренебрегают при рассмотрении элементарных частиц?
3. Можно ли, переходя в систему отсчета, свободно падающую в гравитационном поле, устранить кривизну пространства времени в ОТО?
4. Чем отличается эффект Доплера от эффекта Эйнштейна-Доплера?
5. Почему внешний наблюдатель не видит движение частицы за горизонтом событий?
6. В чем состоят трудности с определением энергии гравитационного поля в ОТО?
7. От каких параметров зависят классические гравитационные эффекты?

Задача 1

Вывести закон всемирного тяготения из III закона Кеплера.

Решение

III закон Кеплера запишется:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}},$$

(1)

где T - период обращения планеты вокруг Солнца, a - большая полуось эллипса. Сила, действующая со стороны Солнца на планету, движущуюся по окружности (считаем, что эксцентриситет мал)

$$F = \frac{m\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}}.$$

(2)

Характерный размер

$$r \sim a.$$

(3)

Характерная скорость

$$\mathrm{v} \sim \frac{a}{T}.$$

(4)

Подставляя (1), (3), (4) в(2), получаем

$$F \sim \frac{1}{a^2}.$$

(5)

Подставляя (3) в (5), имеем искомую зависимость

$$F \sim \frac{1}{r^2}.$$

(6)

Задача 2

Найти условие того, что тело будет двигаться по окружности вокруг центра тяготения.

Решение

Эксцентриситет орбиты планеты дается формулой

$$e = \sqrt{1 + \frac{2J^2 E}{G^2 M^2 m^3}}. \qquad (1)$$

При движении по окружности

$e = 0$. Искомое условие

$$E = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2J^2} \qquad (2)$$

связывает массы планеты m, Солнца M с орбитальным моментом планеты J (зависящим от ее массы, скорости движения по орбите и радиуса орбиты) с энергией планеты E, которая отрицательна, т.к. окружность - частный случай эллипса при $a = b$.

Задача 3

Найти скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно покинуло Галактику.

Решение

Используем формулу для третьей космической скорости

$$\mathrm{v}_3 = \sqrt{\frac{2GM_Г}{R_{СГ}}}, \tag{1}$$

в которой $M_Г = 2 \cdot 10^{11} M_С$ и $R_{СГ} = 2 \cdot 10^9 \, а.е.$ Из (1) получаем для скорости в направлении полюса Галактики $\mathrm{v}_3 = 420 км/с$. Скорость вращения Солнца вокруг центра Галактики равна 200 км/с. По этому при запуске в направлении вращения Солнца вокруг центра Галактики эту скорость нужно вычесть из v_3, а при запуске в противоположном направлении прибавить к v_3.

Задача 4

Найти первую космическую скорость для Луны.

Решение

Используем формулу для первой космической скорости

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{g_Л R_Л}, \tag{1}$$

где ускорение на поверхности Луны

$$g_Л = \frac{GM_Л}{R_Л^2}, \tag{2}$$

радиус Луны $R_Л = 1,74 \cdot 10^6 м$, масса Луны $M_Л = 7,34 \cdot 10^{22} кг$. Из формул (1), (2) получаем искомое выражение для первой космической скорости при старте с поверхности Луны

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{GM_Л}{R_Л}} = 1,68 км/с. \tag{3}$$

Задача 5

Найти ньютоновскую формулу для энергии частицы в гравитационном поле из общей формулы ОТО.

Решение

Энергия в ОТО дается формулой

$$E = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

(1)

где

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi_g}{c^2}.$$

(2)

В ньютоновском случае

$$\sqrt{\frac{1+\frac{2\varphi_g}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\varphi_g}{c^2}.$$

(3)

Отсюда получаем искомую формулу

$$E - mc^2 = \frac{mv^2}{2} + m\varphi_g.$$

4)

Задача 6

Получить метрику Шварцшильда из элементарных соображений.

Решение

Метрика для центрально-симметричного гравитационного поля запишется в виде:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{1}$$

где

$$g_{rr} = -\frac{1}{g_{00}}, \tag{2}$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi_g}{c^2}, \tag{3}$$

$$\varphi_g = \frac{U_g}{m} \ , \tag{4}$$

$$U_g = -\frac{GMm}{r} \tag{5}$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \tag{6}$$

Подставляя (2) - (5) в (1) и используя (6), получаем искомую метрику Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad (7)$$

Задача 7

Получить формулу для углового момента в ОТО.

Решение

Формула для углового момента в ньютоновской теории гравитации имеет вид

$$J = 2m\dot{f}. \qquad (1)$$

Учитывая, что в ОТО нужно от абсолютного ньютоновского времени t перейти к собственному времени τ, запишем секториальную скорость $\dot{f}$ как отношение дифференциала площади

$$df = \frac{1}{2}f^2 d\varphi, \qquad (2)$$

описываемой при повороте радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на угол $d\varphi$ (см. рис.)

к дифференциалу собственного времени

$$d\tau = dt\sqrt{g_{00}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}. \qquad (3)$$

Подставляя (2), (3) в (1), получаем искомую формулу для углового момента в ОТО

$$J = \frac{mr^2}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{d\varphi}{dt}. \qquad (4)$$

Задача 8

Найти гравитационное красное смещение частоты света в лабораторных условиях на Земле.

Решение

Гравитационного красное смещение было измерено на Земле с помощью эффекта Мессбауэра (резонансного поглощения γ- квантов) в эксперименте Паунда-Ребки в 1960 г. Смещение частоты квантов, испускаемых атомами Fe^{57}, при распространении снизу вверх

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = \frac{\sqrt{g_{00}^{(1)}} - \sqrt{g_{00}^{(2)}}}{\sqrt{g_{00}^{(2)}}}, \qquad (1)$$

где

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi_g}{c^2}. \qquad (2)$$

Из формул (1.24) – (1.26) легко получить

$$\varphi_g = g_З h - \frac{GM_З}{R_З}. \qquad (3)$$

Подставляя (2), (3) в (1) и учитывая, что $R_З \gg h_2 > h_1$, получаем искомое красное смещение частоты при распространении квантов из области более сильного в область более слабого гравитационного поля

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = -\frac{g_З H}{c^2}, \qquad (4)$$

где $H = h_2 - h_1$. Разность уровней в эксперименте Паунда-Ребки $H = 12{,}5 м$.

В результате по формуле имеем

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = -1{,}36 \cdot 10^{-15}, \qquad (5)$$

что согласуется с экспериментом в пределах нескольких процентов.

Задача 9

Найти расстояние до фокальной плоскости гравитационной линзы, создаваемой Солнцем.

Решение

Из формул (6.19), (6.20), исключая θ_E и полагая $R_E = \rho_c$, получаем

$$R_C = \sqrt{2 r_g D_{лC}}, \qquad (1)$$

где гравитационный радиус Солнца

$$r_g = \frac{2GM_C}{c^2}. \qquad (2)$$

Из формулы (1) находим искомое расстояние до фокальной плоскости

$$D_{лC} = \frac{R_C^2}{4GM_C} = 544 а.е. \qquad (3)$$