5.3. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА[53]

Как показано выше, кватернионные системы отсчета являются функциями комплексных параметров $Z_\xi = \Phi_\xi + i\Psi_\xi$

$$\Sigma' = O(Z_\xi)\Sigma .$$

При этом в рамках рассматриваемого формализма нет никаких очевидных запретов на то, чтобы параметры преобразования $O(Z_\xi) \in SO(1,2)$ сами были бы локализованы, например, являлись бы функциями собственного времени наблюдателя в Q-CO Σ'

$$\Sigma'(t') = \{\mathbf{p}_{k'}[Z_\xi(t')],\ \mathbf{q}_{k'}[(Z_\xi(t')]\} . \qquad (5\text{-}41)$$

Понятно, что Q-CO типа (5-41), вообще говоря, уже не являются инерциальными и могут совершать сколь угодно сложные движения.

Известно, что специальная теория относительности обладает весьма ограниченными возможностями изучения кинематики неинерциального движения и в целом «плохо приспособлена» для этих целей. Лишь в ряде простых случаев ее скупой математический аппарат позволяет осуществить анализ движения объектов, ускоренных относительно неподвижной системы отсчета; постановка же задач релятивистской кинематики с точки зрения неинерциального наблюдателя противоречит самим основам СТО. Конечно, имеется практика обращения к таким задачам с позиций формализма, свойственного общей теории относительности. Но и в этом случае возникает необходимость введения дополнительных предположений, в частности, о характере переноса пространственно-временных векторов. Хорошо известны две классические задачи неинерциального относительного движения. Первая – задача кинематики прямолинейного равноускоренного движения частицы (так называемое, гиперболическое движение), вторая – оценка кажущегося смещения оси гироскопа (или спина частицы) при равномерном движении его по окружности (прецессия Томаса). В разных вариантах эти задачи рассмотрены в фундаментальных работах [65], [66], [41]. Ниже показано, что все эти кинематические ситуации естественно и компактно рассматриваются в рамках кватернионного релятивизма. Более того, метод кватернионных уравнений поворота позволяет существенно расширить как границы круга задач, так и возможности наблюдателей – участников кинематических схем.

Гиперболическое движение

Если Q-CO Σ' движется прямолинейно и равноускоренно вдоль одного из своих пространственных направлений, например, вдоль $\mathbf{q}_{2'}$, то наблюдатель в Σ' должен ощущать и измерять удельную силу[54] $\varepsilon = const$ (как в лифте Эйнштейна). Специфическая зависимость поведения Σ' от собственного времени t' выводится из следующих соображений. Пусть Σ' движется относительно инерциальной Q-CO Σ вдоль направления $\mathbf{q}_2$. Факту наблюдения Σ' из базы Σ соответствует BQ-вектор

$$d\mathbf{z}' = dt'\,\mathbf{p}_{1'} = dt\,\mathbf{p}_1 + dr\,\mathbf{q}_2 , \qquad (5\text{-}42)$$

следующий из уравнения поворота

$$\Sigma' = H_3^{\psi(t')}\Sigma . \qquad (5\text{-}43)$$

Параметр гиперболического поворота в данном случае считается зависимым от собственного времени Σ', он связан с наблюдаемыми величинами стандартным отношением[55]

---

[53] Основные результаты этого параграфа опубликованы в работе [120].

[54] Как и в Главе 4, это сила на единицу массы, т.е. ускорение.

[55] Запись « $\tanh^{-1}$ » (и аналогичные для гиперболических функций) здесь и ниже означает функцию, обратную гиперболическому тангенсу.

$$\psi(t') = \tanh^{-1}\frac{dr}{dt}.$$

Поскольку в формализме кватернионного релятивизма базовым объектом является инвариантный кватернионный вектор (5-42), здесь, как и в главе 4 для величин ньютоновской механики, оказывается возможным вычислить кинематические Q-векторы.

Q-вектор собственной скорости Σ' вычисляется по общему правилу

$$\mathbf{V}' \equiv \frac{d\mathbf{z}'}{dt'} = \mathbf{p}_{1'},$$

и содержит только единичную временную компоненту, что и должно быть, поскольку с точки зрения возможного наблюдателя в Σ', его Q-СО покоится.

Q-ускорение определяется как следующая производная по собственному времени

$$\mathbf{a}' \equiv \frac{d^2\mathbf{z}'}{dt'^2} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \quad . \qquad (5\text{-}44)$$

Эта величина очевидно является функцией собственной связности Q-пространства

$$\omega_{\xi\, k'n'} = \frac{dO_{k'm}}{dZ_\xi} O_{n'm}$$

или, поскольку групповой параметр зависит от времени, – функцией обобщенной «угловой скорости»

$$\omega_{k'n'} = \frac{dZ_\xi}{dt'}\omega_{\xi\, k'n'}\ .$$

Для вращения (5-43) результат вычисления Q-ускорения (5-44) есть

$$\mathbf{a}' = i\frac{d\mathbf{q}_1}{dt'} = i\,\omega_{1'2'}\,\mathbf{q}_{2'} + i\,\omega_{1'3'}\,\mathbf{q}_{3'} = \frac{d\psi}{dt'}\mathbf{q}_{2'}\ . \qquad (5\text{-}45)$$

Из уравнения (5-45) следует, что наблюдатель в Σ' «чувствует» (т.е. может измерить) единственную компоненту ускорения, направленную в сторону увеличения скорости собственного движения. По условию задачи, это ускорение постоянно

$$\frac{d\psi}{dt'} = \varepsilon = const\,, \qquad (5\text{-}46)$$

или

$$\psi(t') = \varepsilon\, t'\,, \qquad \psi_{t'=0} = 0$$

(движение без начальной скорости).

Таким образом, функциональная зависимость векторов Σ' от собственного времени установлена, ее можно представить в явной форме

$$\mathbf{p}_{1'} = \begin{pmatrix} 0 & \exp(\varepsilon\, t') \\ \exp(-\varepsilon\, t') & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{2'} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i\exp(\varepsilon\, t') \\ i\exp(-\varepsilon\, t') & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{2'} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно найти решение обобщенной задачи кинематики: определить координату, скорость, ускорение и время наблюдаемого объекта как функцию времени наблюдателя.

Случай (А): Q-CO Σ' наблюдается из базы Σ.

В данной кинематической ситуации «метрический» BQ-вектор имеет вид (5-42), следовательно

$$dt = dt' \cosh(\varepsilon t') .$$

Это уравнение сразу интегрируется

$$t = \frac{1}{\varepsilon}\sinh(\varepsilon t') , \tag{5-47}$$

константа интегрирования выбрана так, что начальные моменты времени в обеих Q-CO совпадают. Для определения зависимости времени объекта от времени наблюдателя, уравнение (5-47) необходимо обратить

$$t'(t) = \frac{1}{\varepsilon}\sinh^{-1}(\varepsilon t) = \frac{1}{\varepsilon}\ln\left[\varepsilon t + \sqrt{1+(\varepsilon t)^2}\right]. \tag{5-48}$$

Зависимость скорости Σ' от времени Σ определяется из соотношения

$$V(t) = \tanh(\varepsilon t')$$

с подстановкой $t'(t)$ из (5-48)

$$V(t) = \tanh[\sinh(\varepsilon t)] = \frac{\varepsilon t}{\sqrt{1+(\varepsilon t)^2}} . \tag{5-49}$$

Закон движения Σ' в Q-CO Σ, т.е. зависимость координаты объекта от времени наблюдателя получается интегрированием соотношения (5-49)

$$r(t) = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1+(\varepsilon t)^2} - \frac{1}{\varepsilon} ; \tag{5-50}$$

константа интегрирования ($-1/\varepsilon$) выбрана так, что при $t = 0$ начала координат обеих Q-CO совпадают.

Величина наблюдаемого ускорения Σ' определяется дифференцированием (5-49) по времени наблюдателя

$$a(t) = \frac{\varepsilon}{[1+(\varepsilon t)^2]^{3/2}} . \tag{5-51}$$

Задача кинематики решена; ее результаты в точности совпадают с решениями, данными в работах [65], [41], также выполняется принцип соответствия. Действительно, для малых значений времени наблюдателя (при $t \to 0$) приближения уравнений (5-48) – (5-51)

$$t' \to t , \qquad a \to \varepsilon = const , \qquad V \to \varepsilon t , \qquad r \to \frac{\varepsilon t^2}{2} ,$$

описывают кинематику равноускоренного движения классической механики. Наоборот, для больших значений временной переменной (при $t \to \infty$) соответствующие пределы

$$t' \to \frac{1}{\varepsilon}\ln(2\varepsilon t) \to \infty , \quad a \to \frac{1}{\varepsilon^2 t^3} \to 0 , \qquad V \to 1 \qquad r \to t \to \infty$$

вполне естественны с точки зрения теории относительности.

Случай (Б): Q-СО Σ наблюдается из базы Σ′.

Стоит сразу заметить, что такой случай, когда базой является ускоренная система отсчета, в публикациях, посвященных гиперболическому движению, не рассматривается. Этой кинематической ситуации соответствует уравнение поворота

$$\Sigma = H_3^{-\psi(t')}\,\Sigma' .$$

и «метрический» BQ-вектор

$$d\mathbf{z} = dt'\,\mathbf{p}_{1'} - dr'\,\mathbf{q}_{2'} = dt\,\mathbf{p}_1 ,$$

где $-dr'$ есть проекция перемещения начала Q-СО Σ за промежуток времени dt' наблюдателя в базе Σ′, которая по-прежнему движется равноускоренно, так что параметр Н-вращения остается прежним (5-46), но направление скорости меняется на противоположное. Сначала стоит вычислить «истинные» для возможного наблюдателя в Σ Q-векторные величины в его собственном времени. Q-скорость, как и в предыдущем случае, имеет единственную (и единичную) временную компоненту

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{p}_1 ,$$

а Q-ускорение в силу постоянства векторов триады исчезает

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 ,$$

как и должно быть для инерциальной (в частности, покоящейся) системы отсчета.

Решение обобщенной задачи кинематики осуществляется по вышеизложенной схеме. Зависимость времени объекта от времени наблюдателя есть

$$dt = \frac{dt'}{\cosh(\varepsilon t')} ,$$

$$t(t') = \frac{1}{\varepsilon}\arctan[\sinh(\varepsilon t')] \equiv \frac{1}{\varepsilon}\arcsin[\tanh(\varepsilon t')] , \qquad (5\text{-}52)$$

начальные моменты времени синхронизированы.

Скорость, координата и ускорение объекта суть

$$V'(t') = \tanh(\varepsilon t') , \qquad (5\text{-}53)$$

$$r'(t') = \frac{1}{\varepsilon}\ln[\cosh(\varepsilon t') , \qquad (5\text{-}54)$$

$$a'(t') = \frac{\varepsilon}{\cosh^2(\varepsilon t')} . \qquad (5\text{-}55)$$

Задача кинематики наблюдения неподвижного объекта из равноускоренной системы отсчета решена. Поведение видимых кинематических величин в крайних точках луча времени следующее. При $t \to 0$ все характеристики соответствуют случаю нерелятивистского прямолинейного равноускоренного движения

$$t \to t' , \qquad a' \to \varepsilon = const , \qquad V' \to \varepsilon t' , \qquad r' \to \frac{\varepsilon t'^2}{2} .$$

При $t \to \infty$ для наблюдаемых величин имеет место нормальная ультрарелятивистская кинематика

$$a' \to \frac{2\varepsilon}{\exp(-2\varepsilon t')} \to 0\,, \qquad V' \to 1\,, \qquad r' \to t' \to \infty\,,$$

особенным является только асимптотическое поведение времени. Согласно уравнению (5-52), для Σ'-наблюдателя часы Σ будут постоянно замедляться, стремясь при больших значениях Σ'-времени к пределу

$$t_{t'\to\infty} \to \frac{\pi\, c}{2\varepsilon}\,, \tag{5-56}$$

здесь c – величина фундаментальной скорости. Если принять значение ускорения

$$\varepsilon = 10\,G \cong 10^4\ см \cdot c^{-1}\,,$$

при котором вторая космическая скорость достигается примерно за 2 минуты, то для наблюдателя, ускоряющегося в ракете, земные часы остановятся на отметке

$$t_{\max} \cong 5 \cdot 10^6\ c\,,$$

т.е. из ракеты будет представляться, что на Земле едва ли истекли два месяца, тогда как часы в ракете отметят очень большой интервал времени.

Графически полученные выше решения кинематических задач представлены на рис. 5-7. Заметное различие кривых, соответствующих схожим кинематическим характеристикам, в случая (А) и (Б) отражает асимметрию по свойствам инерциальности наблюдателей.

Учет запаздывания сигнала.

Существенно отметить, что уравнения (5-48) – (5-51) и (5-52) – (5-55) дают такие значения кинематических величин, как будто системы отсчета Σ и Σ' обмениваются информацией мгновенно. В действительности передача сигнала в вакууме идет с постоянной скоростью $c = 1$, так что сведения о физическом статусе наблюдаемого объекта достигают удаленного наблюдателя через некоторый промежуток времени.

В случае (А) значение запаздывающего времени есть

$$t_r = t + r(t)\,;$$

подстановка сюда соотношения (5-50) позволяет выразить t в терминах t_r

$$t = \frac{t_r}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\varepsilon\, t_r}\right). \tag{5-57}$$

Теперь время «мгновенной передачи информации» может быть заменено во всех кинематических величинах запаздывающим временем, которое наблюдатель считывает со своих часов. Например, пересчитанная таким образом величина относительной скорости (5-49) есть

$$V(t_r) = \frac{\varepsilon\, t_r [1 + 1/(1+\varepsilon\, t_r)]}{\sqrt{4 + \{\varepsilon\, t_r\, [1 + 1/(1+\varepsilon\, t_r)]\}^2}}\,.$$

Из соотношения (5-57) следует, что поведение мгновенного и запаздывающего времени в крайних «точках» временного луча похоже. При $t \to 0$

$$t_r \to t \to 0\,,$$

при $t \to \infty$

$$t_r \to 2t \to \infty\,.$$

В случае (Б) связь между мгновенным и запаздывающим временем определяется уравнением

$$t'_r = t' + r'(t')$$

и соотношением (5-54)

$$t'_r = t' + \frac{1}{\varepsilon}\ln[\cosh(\varepsilon t'),$$

После преобразования последнего выражения

$$2\exp[\varepsilon(t'_r - t')] = \exp(\varepsilon t') + \exp(-\varepsilon t')$$

из него удается выразить t' как функцию t_r

$$t' = \frac{1}{2\varepsilon}\ln\left[2\exp(\varepsilon t'_r) - 1\right]. \qquad (5\text{-}58)$$

При малых значениях запаздывающего времени

$$t'_{t'_r\to 0} \cong \frac{1}{2\varepsilon}\ln(1 + 2\varepsilon t'_r) \cong t'_r,$$

при больших значениях

$$t'_{t'_r\to\infty} \cong \frac{1}{2\varepsilon}(\ln 2 + \varepsilon t'_r) \cong \frac{1}{2}t'_r \to \infty,$$

т.е. в предельных точках поведение мгновенного и запаздывающего времени одинаково.

Несмотря на существенное различие формул (5-57) и (5-58) для случаев (А) и (Б), значения соответствующих кривых оказываются весьма близки ($\varepsilon = 1$):

t_r, t'_r	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$t(t_r)$	0	0,41	0,75	1,33	1,87	2,4	2,91	3,41
$t'(t'_r)$	0	0,41	0,74	1,31	1,8	2,34	2,84	3,34

Подстановка выражения (5-58) в формулы (5-52) – (5-55) позволяет представить решение задачи кинематики для случая (Б) в реальном времени наблюдателя.

Стоит обратить внимание на значимость введения запаздывающего времени при решении некоторых задач неинерциального движения. Для инерциальных систем отсчета (в рамках СТО) регулярные события на наблюдаемом объекте воспринимаются наблюдателем на базе через равные интервалы времени, и пересчет на запаздывающее время принципиально новой информации не дает (см. диаграмму Минковского на рис.5-8а). Но в кинематике неинерциального релятивистского движения различие между запаздывающим временем (экспериментальные данные) и мгновенным временем (расчетные данные) может быть весьма существенным. Так, на рис. 5-8б изображена диаграмма Минковского для равноускоренно движущейся частицы, выдающей сигнал через равные промежутки собственного времени $\Delta t'$ (это часть графика $r(t)$ на рис. 5-7, симметрично отраженного относительно мировой линии светового луча). Видно, что в этом случае соответствующие интервалы мгновенного времени для инерциального наблюдателя монотонно уменьшаются, а интервалы запаздывающего времени, наоборот, монотонно возрастают. Правильное понимание смысла этих данных необходимо для верной оценки поведения объекта. Сложность такой оценки еще более возрастает при рассмотрении криволинейного релятивистского движения, простейшим примером которого является движение по окружности.

Релятивистское движение по окружности

В данной кинематической ситуации оказываются локализованными оба вида групповых параметров кватернионной относительности – и действительные углы обычных поворотов, и мнимые «углы» гиперболических поворотов.

Пусть Q-CO Σ' движется по круговой орбите радиуса R, начало инерциальной системы Σ находится в центре орбиты, а векторы $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ лежат в ее плоскости (рис. 5-9). Построение релятивистской схемы этой кинематической модели осуществляется в два этапа.

Первый шаг – определение нерелятивистского Q-вектора перемещения. В базе Σ координаты Q-CO Σ' суть

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = R\cos\alpha(t), \qquad x_3 = R\sin\alpha(t).$$

Параллельно вектору скорости Σ' всегда можно направить один из векторов репера, связанных с базой, например третий

$$\mathbf{q}_{\bar{3}} \equiv \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{x}_n\,\dot{x}_n}}\mathbf{q}_k = -\sin\alpha\,\mathbf{q}_2 + \cos\alpha\,\mathbf{q}_3 \ .$$

Новая – переменная – Q-триада, порожденная простым вращением

$$\overline{\Sigma} = R_1^{\alpha(t)}\,\Sigma\,, \tag{5-59}$$

может быть интерпретирована двояко.

С одной стороны, это Q-репер с началом, совпадающим с началом Σ, но вращающийся вокруг $\mathbf{q}_1$ с угловой скоростью

$$\omega(t) = \dot{\alpha}(t)$$

так, что его вектор $\mathbf{q}_{\bar{2}}$ всегда направлен на обращающуюся по орбите Q-CO Σ', т.е. $\overline{\Sigma}$ представляет собой следящий репер. При этом, поскольку пространственно-временные интервалы в $\overline{\Sigma}$ и Σ измеряются одинаково, $\overline{\Sigma}$ наравне с Σ является базой «неподвижного» наблюдателя (правда, вращающегося вокруг своей оси).

С другой стороны, сама триада $\overline{\Sigma}$ может рассматриваться как нерелятивистский репер, движущийся по орбите вокруг центра вращения с линейной скоростью

$$V(t) = \omega(t)R\,,$$

при этом модуль малого перемещения есть

$$dr = \omega\,R\,dt\,.$$

Теперь можно сделать следующий шаг: «включить» релятивизм. «Включение» осуществляется *H*-вращением $\overline{\Sigma}$ на мнимый «угол»

$$\psi(t) = \tanh^{-1}(\omega R)$$

вокруг вектора $\mathbf{q}_{\bar{2}}$

$$\Sigma' = H_2^{\psi(t)}\,\overline{\Sigma}\,, \tag{5-60}$$

при этом изменение времени отсчитывается вдоль направления $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{\bar{1}}$, не вовлеченного в определение пространственных кинематических характеристик.

Таким образом, полное уравнение поворота представляет собой сумму двух простых вращений (5-59) и (5-60)

$$\Sigma' = H_2^{\psi(t)} \,\overline{\Sigma} = H_2^{\psi} R_1^{\alpha} \Sigma \,, \tag{5-61}$$

удовлетворяющих свойству $SO(1,2)$-симметрии.

Уравнение поворота (5-61), хотя построено из исходной постоянной базы Σ, является в определенном смысле универсальным, поскольку позволяет выразить и проанализировать любую из рассмотренных систем отсчета Σ, Σ′ и $\overline{\Sigma}$, причем каждую – с присущими только ей кинематическими свойствами.

Случай (АА): наблюдается Q-СО Σ′.

Выражение для «метрического» BQ-вектора в этом случае следует из первой строки матричного уравнения поворота (5-61)

$$d\mathbf{z}' \equiv dt' \mathbf{p}_{1'} = dt\,\mathbf{p}_{\bar{1}} + dt\,\omega R\,\mathbf{q}_{\bar{3}} = dt\,\mathbf{p}_1 + dt\,\omega R(-\sin\alpha\,\mathbf{q}_2 + \cos\alpha\,\mathbf{q}_3)\;; \tag{5-62}$$

отсюда видно, что задачу кинематики возможно решать как с позиций инерциальной базы Σ, так и из вращающейся базы $\overline{\Sigma}$. Вначале, однако, полезно вычислить удельную силу (ускорение), которую «чувствует» и может измерить потенциальный наблюдатель в Q-СО Σ′, поскольку это позволяет установить зависимость групповых параметров от собственного времени неинерциального наблюдателя.

Q-ускорение вычисляется по формуле (5-44)

$$\mathbf{a}' \equiv \frac{d^2\mathbf{z}'}{dt'^2} = i\,\frac{d\mathbf{q}_{1'}}{dt'} = i\,\omega_{1'2'}\,\mathbf{q}_{2'} + i\,\omega_{1'3'}\,\mathbf{q}_{3'}\;, \tag{5-63}$$

а компоненты матрицы связности – по удобной здесь «векторной» формуле (2-63, глава 2)

$$\omega = \frac{d}{dt'}(R_1^{\alpha} H_2^{\psi})(H_2^{\psi})^{-1}(R_1^{\alpha})^{-1}. \tag{5-64}$$

После подстановки (5-64) в (5-63) Q-ускорение Σ′ принимает простой вид

$$\mathbf{a}' = -\frac{d\alpha}{dt'}\sinh\psi\,\mathbf{q}_{2'} + \frac{d\psi}{dt'}\mathbf{q}_{3'}$$

суммы нормального, или центростремительного ускорения (ответственного за изменение направления скорости и направленного к центру противоположно вектору $\mathbf{q}_{2'}$)

$$a'_{norm} = -\frac{d\alpha}{dt'}\sinh\psi$$

и касательного ускорения

$$a'_{\tan} = \frac{d\psi}{dt'}\;,$$

определяющего изменение модуля скорости.

Для простых движений по окружности эти ускорения легко подсчитать.

Равномерное круговое движение удовлетворяет условиям

$$a'_{\tan} = 0\;, \qquad \psi = \tanh^{-1}(\omega' R') = const\;,$$

где ω' – модуль угловой скорости, R' – радиус орбиты, вычисленные Σ'-наблюдателем. При этом величина нормального ускорения – «инерциальной» удельной силы, «притягивающей» тело отсчета Q-CO Σ' к центру вращения – также постоянна

$$a'_{norm} = \omega' \sinh\psi = \omega'^2 R' \cosh\psi = \frac{\omega'^2 R'}{\sqrt{1-(\omega' R')^2}} .$$

Равноускоренное круговое движение, по сути, является гиперболическим движением по окружности. Оно имеет следующие характеристики, измеряемые и вычисляемые Σ'-наблюдателем

$$a'_{\tan} = \lambda = const \ , \qquad \psi = \lambda t' \ , \qquad a'_{norm} = \omega'^2(t')\, R' \cosh(\lambda t') \ ,$$

это вполне ожидаемые функции.

Ниже кинематика кругового движения будут решаться для зависимости $\psi(t')$ общего вида; она предполагается заданной.

Решение собственно задачи кинематики при наблюдении Σ' из $\overline{\Sigma}$ или из Σ осуществляется по стандартной схеме. Из уравнения (5-62) определяются взаимозависимость временных переменных

$$dt = d\,t' \cosh\psi(t') \ , \quad t = \int d\,t' \cosh\psi(t') \tag{5-65}$$

и обратная функция $t'(t)$ (в любой возможной форме). После подстановки $t'(t)$ в функцию гиперболического параметра вычисляются как функции времени наблюдателя в центре вращения:

угловая скорость

$$\omega = \frac{1}{R} \tanh\psi[t'(t)] \ , \tag{5-66}$$

угол вращения

$$\alpha(t) = \int \omega(t)\, dt \ , \tag{5-67}$$

касательная и нормальная составляющие ускорения

$$a_{\tan}(t) = R\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{\cosh^2\psi}\frac{d\psi}{dt} \ , \qquad a_{norm} = R\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)^2 . \tag{5-68}$$

Уравнения (5-65) – (5-68) представляют решение обобщенной задачи кинематики для кругового движения с позиций инерциальной системы отсчета.

Дополнительно здесь следует обратить внимание на следующее.

Малый отрезок дуги – путь, пройденный Σ' за малое время, будучи измеренным в единицах Σ, «сокращается»

$$dl = dl' \cosh\psi \ ,$$

тогда как длина радиуса, перпендикулярного вектору скорости и не вовлеченного в гиперболические преобразования, представляется неизменной

$$R' = R \ . \tag{5-69}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае (АА) соотношение измеряемых углов таково

$$d\alpha = \frac{dl}{R} = \frac{dl'}{R'}\cosh\psi = d\alpha'\cosh\psi \,. \tag{5-70}$$

Из формул (5-69), (5-70) и (5-65) следует равенство численных значений угловой скорости, измеренной наблюдателями в Σ и Σ'

$$\omega(\Sigma) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha'}{dt'} = \omega'(\Sigma')\,, \tag{5-71}$$

что вполне соответствует постулату единого для двух наблюдателей значения скорости их относительного движения (или соответствующего гиперболического параметра)

$$V = \tanh\psi = \omega\, R = \omega'\, R' \,.$$

На этом анализ случая (АА) завершается.

<u>Случай (ББ): Наблюдается система отсчета Σ</u>.

Для этой ситуации наблюдаемая Q-CO выражается из уравнения поворота (5-61)

$$\Sigma = R_1^{-\alpha}\, H_2^{-\psi}\, \Sigma' \,,$$

откуда следует «метрический» BQ-вектор

$$d\mathbf{z} \equiv dt\,\mathbf{p}_1 = dt\,\mathbf{p}_{\bar{1}} = dt'\ \mathbf{p}_{1'} + dt'\,\omega' R'\,\mathbf{q}_{3'} \,, \tag{5-73}$$

где

$$\omega' R' = \omega\, R = \tanh\psi(t') \,.$$

Q-вектор линейного ускорения, измеряемого в Q-CO Σ, определяется из (5-73)

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = 0 \,;$$

его отсутствие естественно, поскольку Σ-наблюдатель покоится в центре орбиты.

Задача кинематики решается стандартно.

Сначала определяется соотношение изменения времени

$$dt' = dt\cosh\psi(t')\,, \qquad t = \int \frac{d\,t'}{\cosh\psi(t')} \,. \tag{5-74}$$

Затем как функция Σ′-времени вычисляются кинематические величины, описывающие кажущееся Σ′-наблюдателю движение Q-CO Σ:

относительная скорость

$$V = \tanh\psi(t')\,, \tag{5-75}$$

угол поворота

$$\alpha(t') = \int \frac{\tanh\psi(t')}{R}\, dt' \tag{5-76}$$

и угловое ускорение

$$a_{\tan}(t) = \frac{1}{\cosh^2\psi}\frac{d\psi}{dt'} \,. \tag{5-77}$$

В общем виде задача кинематики решена. Конкретные значения величин вычисляются при заданной зависимости $\psi(t')$. В частности, для простых видов кругового движения формулы

(5-74) – (5-77) описывают поведение наблюдаемого объекта, для малых скоростей свойственное объектам классической механики, а в ультрарелятивистском пределе – соответствующее принципам теории относительности.

Стоит также отметить, что в случаях (АА) и (ББ) наблюдения основываются на сигналах, полученных в запаздывающем времени. Но в отличие от прямолинейного движения, при движении по окружности задержка времени поступления сигнала к наблюдателю всегда постоянна и не оказывает существенного влияния на оценку значений кинематических величин.

Прецессия Томаса

В 1927 году сразу же после экспериментального открытия спина электрона, Л.Томас показал, что, согласно принципам СТО, для неподвижного наблюдателя направление вектора спина изменяется при движении электрона по орбите [67]. Этот эффект, получивший название «прецессии Томаса», имеет исключительно релятивистскую природу и не зависит от конкретных свойств наблюдаемого вектора. Ось движущегося по круговой орбите гироскопа, и с «его точки зрения» постоянно направленная по отношению к «неподвижным звездам», для покоящегося наблюдателя будет испытывать такую же «прецессию».

Как отмечалось выше, описание этого эффекта в рамках СТО требует дополнительных методов и предположений. Так, в работе [66] криволинейная траектория аппроксимируется отрезками прямой линии с последующим переходом к пределу бесконечного числа отрезков; при этом для частоты прецессии Томаса получается приближенная формула. В книге [41] для переноса четырехмерного вектора спина по орбите приходится постулировать правило Ферми-Уокера.

Формализм уравнений поворота позволяет сравнительно просто решить эту задачу без выхода за рамки логики рассматриваемого здесь кватернионного релятивизма.

<u>Прецессия Томаса для кругового движения</u>.

Пусть начало постоянной Q-CO Σ находится в центре, вокруг которого равномерно – с постоянной угловой скоростью ω – вращается Q-CO Σ'. Пусть также наблюдатель в каждой из этих систем отсчета отмечает, что пространственные векторы его Q-CO всегда направлены постоянно (рис. 5-10). Требуется выяснить, как векторы Σ' «видны» с позиций наблюдателя Σ.

Эта кинематическая ситуация близка той, что описана для кругового движения в предыдущем разделе. Действительно, Q-CO, заданная уравнением поворота (5-61), тоже обращается по орбите вокруг Σ, но она также вращается и вокруг своей оси, поскольку один из ее векторов всегда остается параллельным линейной скорости. Для того, чтобы оказаться в условиях последней задачи, очевидно, следует вращение вокруг своей оси компенсировать обратным R-вращением на надлежащий угол $-\alpha'$. Тогда уравнение поворота для данной задачи записывается как

$$\Sigma' = R_1^{-\alpha'}\, H_2^{\psi}\, R_1^{\alpha}\, \Sigma\,, \qquad (5\text{-}78)$$

или в явной матричной форме

$$\begin{pmatrix}\mathbf{q}_{1'}\\ \mathbf{q}_{2'}\\ \mathbf{q}_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha' & -\sin\alpha'\\ 0 & \sin\alpha' & \cos\alpha'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\psi & 0 & -i\sinh\psi\\ 0 & 1 & 0\\ i\sinh\psi & 0 & \cosh\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{q}_1\\ \mathbf{q}_2\\ \mathbf{q}_3\end{pmatrix}.$$

Пусть углы вращения рассчитываются во времени неподвижного Σ-наблюдателя t[56]

[56] В СТО часто применяется термин «время лабораторной системы отсчета».

$$\alpha = \omega(\Sigma)\, t\,, \quad \alpha' = \omega'(\Sigma)\, t\,.$$

Для решения задачи нужно определить, каким Σ-наблюдателю кажется изменение угла обратного вращения α', или (что эквивалентно) как истинная частота обратного вращения Σ′ вокруг своей оси представляется с позиций Q-CO Σ.

Истинная частота обратного вращения определяется в базе Σ′. Чтобы ее векторы были ориентированы на одни и те же «неподвижные звезды», Σ′-наблюдатель измеряет собственный период обратного вращения $T'(\Sigma')$ (за это время осуществляется оборот на угол 2π) и вычисляет частоту

$$\omega'(\Sigma') = \frac{2\pi}{T'(\Sigma')}\,.$$

Интервалы времени базы Σ′ и Q-CO Σ связаны соотношением (5-74), поэтому

$$T'(\Sigma') = T'(\Sigma)\cosh\psi\,,$$

где $T'(\Sigma)$ – кажущийся Σ-наблюдателю соответствующий период (измеряемый в единицах Q-CO Σ). Следовательно,

$$\omega'(\Sigma') = \frac{2\pi}{T'(\Sigma)\cosh\psi} = \frac{\omega'(\Sigma)}{\cosh\psi}\,.$$

Отсюда, с учетом равенства (5-71), следует искомое соотношение

$$\omega'(\Sigma) = \omega(\Sigma)\cosh\psi\,, \qquad (5\text{-}79)$$

которое означает, что измерение циклической частоты обратного вращения Σ′ в единицах Σ дает величину, в $\cosh\psi$ раз большую, чем величина частоты обращения по орбите (или величина частоты вращения Q-CO в центре орбиты, необходимая для слежения за объектом Σ′).

Ориентацию постоянного в Σ′ спина (или оси гироскопа)можно выбрать, например, вдоль вектора $\mathbf{q}_{2'}$, тогда из уравнения (5-78) можно найти это вектор как сумму составляющих вдоль векторов Q-CO Σ

$$\mathbf{q}_{2'} = -i\sinh\psi\sin\alpha\,\mathbf{q}_1 + (\cos\alpha\cos\alpha' + \cosh\psi\sin\alpha\sin\alpha')\,\mathbf{q}_2 + (\sin\alpha\cos\alpha' - \cosh\psi\cos\alpha\sin\alpha')\,\mathbf{q}_3\,.$$

Проекция $\mathbf{q}_{2'}$ на любое пространственное направление, например, на $\mathbf{q}_3$ есть

$$\langle \mathbf{q}_{2'} \rangle_3 = \sin\alpha\cos\alpha' - \cosh\psi\cos\alpha\sin\alpha' = \sin(\alpha - \alpha') - \frac{1}{2}(\cosh\psi - 1)\sin\alpha\sin\alpha'\,, \qquad (5\text{-}80)$$

или после простых преобразований

$$\langle \mathbf{q}_{2'} \rangle_3 = \sin\{[\omega(\Sigma) - \omega'(\Sigma)]t\} - \sinh^2\frac{\psi}{2}\,\sin\omega(\Sigma)\,t\,\sin\omega'(\Sigma)\,t\,. \qquad (5\text{-}81)$$

С учетом соотношения (5-79) разность частот в первом слагаемом правой части уравнения (5-81) записывается в виде

$$\omega_T \equiv \omega(\Sigma) - \omega'(\Sigma) = \omega\,(1 - \cosh\psi)\,; \qquad (5\text{-}82)$$

это и есть «наиболее заметная» частота прецессии Томаса. Для малых значений относительной скорости формула (5-82) сводится к известному выражению

$$\omega_T \cong -\frac{\omega}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2, \qquad V = \omega R\,, \qquad (5\text{-}83)$$

где R – радиус орбиты (в явном виде введена фундаментальная скорость c).

Второе «слагаемое» правой части (5-81), как легко убедиться, существенно «менее заметно», поскольку оно прямо пропорционально квадрату отношения относительной скорости движения к скорости света. В частности, при малой орбитальной скорости второе слагаемое имеет предел $-\frac{1}{4}\sin^2 2\omega t$.

Стоит заметить, что результаты представленные формулами (5-81) – (5-82), в точности совпадают с результатами вычислений в книге [41].

<u>«Обратная» прецессия Томаса</u>.

Рассмотренные системы отсчета в центре вращения и на круговой орбите кинематически не равноправны; однако для движущегося неинерциального Σ'-наблюдателя также должен иметь место эффект изменения положения направляющих векторов Q-CO Σ, которые в действительности ориентированы постоянно. Чтобы это выяснить, достаточно обратить уравнение поворота (5-78), выразив из него Σ как функцию Σ'

$$\Sigma = R_1^{-\alpha}\, H_2^{-\psi}\, R_1^{\alpha'}\, \Sigma' \, . \tag{5-84}$$

При этом известной считается угловая частота $\omega'(\Sigma') = \omega(\Sigma) = const$ и функция

$$\alpha' = \omega'(\Sigma')\, t' \, ,$$

а определить требуется зависимость

$$\alpha = \omega(\Sigma')\, t' \, ,$$

где $\omega(\Sigma')$ – частота обратного вращения следящего за Σ' репера с точки зрения Σ'-наблюдателя. Истинное значение этой частоты, по схеме, аналогичной вышеизложенной, определяется в базе Σ, и из соотношения интервалов времени (5-65) следует формула «симметричная» (5-79)

$$\omega(\Sigma') = \omega'(\Sigma')\cosh\psi \, .$$

Затем вычисляется вторая строка матричного уравнения (5-84), откуда достаточно взять всего одну проекцию

$$\langle \mathbf{q}_2 \rangle_{3'} = \sin\{[\omega'(\Sigma') - \omega(\Sigma')]t'\} - \sinh^2\frac{\psi}{2}\, \sin\omega'(\Sigma')\, t' \, \sin\omega(\Sigma')\, t' \, ,$$

откуда следует результат, идентичный (5-82)

$$\omega_T \equiv \omega'(\Sigma') - \omega(\Sigma') = \omega'(1 - \cosh\psi) \, .$$

Один из примеров такой прецессии – кажущееся смещение перигелия одной планеты с точки зрения наблюдателя с другой. Действительно, если не учитывать воздействия других планет и гравитационного смещения, перигелий планеты остается постоянным в фиксированной относительно звезд системе координат. Наблюдатель на планете, движущейся по круговой орбите, мог бы делать вывод о смещении перигелия. Однако для земного астронома, движущегося относительно Солнца со скоростью $V \cong 30\ км/с$, этот эффект будет фактически не наблюдаем

$$\omega_T \cong \frac{\pi}{100}\frac{V^2}{c^2} \cong 3{,}14 \cdot 10^{-6}\ \frac{рад}{100\, лет} \, .$$

Релятивистская прецессия общего вида для плоских траекторий общего вида.[57]

Как видно, кватернионный релятивизм удобен для решения многих кинематических задач, и, в первую очередь, в связи с тем, что его основным элементом является инвариантный BQ-вектор, для которого зависимость от локализованных (в частности, зависящих от времени) параметров поворота задается в явном виде. Это обстоятельство позволяет проанализировать возможность расчета аналогичных эффектов для систем отсчета, движущихся не только по окружности, но по гладким[58] траекториям более общего вида.

Алгоритм построения уравнения поворота остается тем же: постоянная Q-CO преобразуется во вращающуюся так, чтобы один из направляющих векторов был всегда параллелен скорости наблюдаемого объекта, затем надлежащим гиперболическим поворотом осуществляется «перенос» репера на орбиту, после чего делается обратное вращение, стабилизирующее направление осей репера на орбите. При этом следует помнить, что всякое пространственное вращение производится вокруг направления изменения времени, а всякий гиперболический поворот относительно пространственной оси, ортогональной направлению скорости.

Можно попытаться применить эту процедуру к траектории произвольной формы. Тогда уже на первом этапе – построения матрицы действительного поворота – возникает проблема. Как и любая матрица из группы SO(3,R), матрица первого действительного поворота, имеет собственный вектор с единичным собственным значением; этот вектор определяет мгновенное направление оси пространственного вращения Q-триады [см. главу 2, формула (2-20)], а, следовательно, именно он и должен задавать направление изменения времени. Однако ось мгновенного поворота, вообще говоря, не перпендикулярна касательной к траектории. Это означает, что в общем случае изменение времени и вектор перемещения нельзя связать с двумя направлениями одной Q-триады.

С другой стороны, следующий – гиперболический – поворот должен осуществляться относительно оси, параллельной вектору нормального ускорения, ортогонального вектору скорости и третьему вектору триады Френе, направленному по второй кривизне («закрученности») траектории. Именно этот третий вектор в рамках рассматриваемого формализма должен задавать направление изменения времени. Таким образом, необходимо, чтобы ось мгновенного пространственного вращения совпадала с направлением второй кривизны; понятно, что это требование в общем случае тоже не выполняется.

Проблема полностью разрешается, если рассматриваются только плоские траектории. Для них простым вращением (с локализованным параметром поворота) относительно нормали к плоскости всегда можно построить репер Френе, один из векторов которого касателен траектории (параллелен скорости объекта), а второй задает направление первой кривизны (направлен вдоль линии нормального ускорения). «Закрученность» плоских кривых (вторая кривизна) очевидно равна нулю, поэтому нормаль к плоскости, составленной векторами скорости и ускорения, не изменяет пространственной ориентации.

Для таких кривых легко описать процедуру построения уравнения поворота и определения релятивистской прецессии для любых плоских траекторий.

Пусть система отсчета Σ', направляющие векторы которой стабильно ориентированы, движется по некоторой плоской траектории относительно другой Q-CO Σ [59] (рис. 5-11). Для простоты сразу можно разместить в плоскости траектории векторы №1 и №2 обоих реперов. Алгоритм построения уравнение поворота следующий.

[57] Результаты этого раздела опубликованы в работе [121].

[58] Гладкость траекторий связана с необходимостью дифференцировать параметрически заданные уравнения этой траектории.

[59] Нет необходимости считать Q-CO Σ обязательно инерциальной.

1) По заданной зависимости координат Σ' от времени в Σ

$$x_k = x_k(t)$$

вектор №1 Q-триады направляется вдоль вектора относительной скорости

$$\mathbf{q}_{\bar{1}} = \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{x}_n \dot{x}_n}} \mathbf{q}_k .$$

Зависящий от времени угол поворота исходного репера определяется, например, по формуле

$$\alpha(t) = \arccos \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_k \dot{x}_k}} ,$$

значит, полностью определяется матрица совершаемого при этом простого вращения $R_3^{\alpha(t)}$ относительно вектора №3. При этом вектор №2 автоматически оказывается направленным вдоль линии вектора нормального ускорения. Q-репер Френе построен

$$\overline{\Sigma} = R_3^{\alpha(t)} \, \Sigma ,$$

можно осуществлять этап перехода к релятивизму.

2) Репер $\overline{\Sigma}$ «переносится на орбиту» гиперболическим поворотом вокруг направления нормального ускорения (ортогонального скорости и поэтому не задействованного в преобразованиях) и становится релятивистским

$$\overline{\Sigma}' = R_3^{\psi(t)} \, \overline{\Sigma} ,$$

где параметр поворота связан с модулем относительной скорости стандартной формулой

$$\psi(t) = \tanh^{-1} \sqrt{\dot{x}_k \dot{x}_k} .$$

3) С позиций Σ'-наблюдателя осуществляется обратный поворот (на действительный угол $-\alpha'$) так, чтобы векторы движущейся Q-СО были стабильно ориентированы

$$\Sigma' = R_3^{-\alpha'} \, \overline{\Sigma}' .$$

4) Из полного уравнения поворота, описывающее данную кинематическую ситуацию

$$\Sigma' = R_3^{-\alpha'} \, H_2^{\psi} \, R_3^{\alpha} \, \Sigma , \tag{5-85}$$

определяется проекция любого пространственного вектора Σ' на пространственный вектор Σ. Как и в случае классической прецессии Томаса, наиболее значимое слагаемое этой проекции можно представить как функцию разности собственных углов действительного вращения, например

$$\langle \mathbf{q}_2 \rangle_{1'} \cong \sin(\alpha - \alpha') ,$$

откуда можно вычислить скорость кажущейся релятивистской прецессии

$$\Omega_T = \frac{d}{dt}(\alpha - \alpha') \cdot$$

Понятно, что все расчетные величины являются функциями времени.

В качестве примера ниже дан расчет видимой прецессии оси гироскопа (спина), движущегося вблизи массивного небесного тела (например, Солнца) по параболической орбите.

Релятивистская прецессия спина на параболической траектории.

Движение по такой траектории есть одно из решений кеплеровской задачи классической механики (см., например [65], стр. 54). Гравитационная постоянная G, масса Солнца M и геометрический параметр орбиты p используются в решении в виде устойчивого сочетания, измеряющегося в единицах времени

$$T \equiv \sqrt{\frac{p^3}{4GM}} \;.$$

Закон движения удобно задать в параметрической форме

$$x_1 = p\,\eta\,, \qquad x_2 = \frac{p}{2}(1-\eta^2)\,, \tag{5-86}$$

где η – параметр, с которым абсолютное время связано соотношением

$$t = \sqrt{\frac{p^3}{4GM}}\left(\eta + \frac{\eta^3}{3}\right). \tag{5-87}$$

Предполагается, что по траектории, описанной уравнениями (5-86), (5-87) движется постоянно ориентированный вектор (спин).

В соответствии с вышеописанной процедурой для данной траектории простым вращением относительно оси, перпендикулярной плоскости траектории (относительно вектора №3), из постоянного репера, направляющие вектора №1 и №2 которого лежат в плоскости орбиты, строится нерелятивистский репер Френе. Вектор №1 Q-репера Френе направлен вдоль вектора скорости

$$V_1 = \frac{d\,x_1}{dt} = \frac{p}{T\,(1+\eta^2)}\,, \qquad V_2 = \frac{d\,x_2}{dt} = -\frac{p\,\eta}{T\,(1+\eta^2)}\,, \tag{5-88}$$

при этом угол вращения связан с параметром простыми соотношениями

$$\cos\alpha = \frac{V_1}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{V_2}{V} = -\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}\,,$$

где модуль скорости есть

$$V \equiv \frac{p}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}\,.$$

Вектор №2 репера Френе, лежащий в плоскости движения, автоматически оказывается направленным вдоль линии нормального ускорения.

Следующий шаг – гиперболический поворот относительно линии нормального ускорения, при этом вращающаяся Q-триада «переносится на орбиту»

$$\overline{\Sigma}' = R_2^{\psi}\,\overline{\Sigma}\,,$$

где $\psi = \tanh^{-1} V$.

Последний этап построения уравнения поворота: обратное вращение Q-CO $\overline{\Sigma}'$, но уже на угол α', рассчитанный ее наблюдателем так, чтобы спин был ориентирован все время на одни и те же «удаленные звезды». В целом уравнение поворота приобретает вид (5-85), откуда определяется проекция вектора № 2' на направление вектора № 1

$$\left\langle \mathbf{q}_{2'} \right\rangle_1 = \sin(\alpha - \alpha') - (\cosh\psi - 1)\cos\alpha\cos\alpha'\,.$$

Первое слагаемое в правой части описывает, как и в уравнении (5-81), наиболее заметное изменение проекции. Стандартная зависимость между истинным в Σ' и кажущемся в Σ изменением угла

$$d\alpha' = d\alpha \cosh\psi$$

с учетом следующих из уравнений (5-87) и (5-88) соотношений

$$dt = T\,(1+\eta^2)\,d\eta\,,$$

$$\tan\varphi = -\eta \qquad (5\text{-}89)$$

позволяет найти «циклическую частоту» кажущейся прецессии как функцию параметра

$$\omega_P(\eta) \equiv \frac{d}{dt}(\alpha-\alpha') = \frac{d\alpha}{dt}(1-\cosh\psi) = -\frac{1}{T\,(1+\eta^2)^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\right). \qquad (5\text{-}90)$$

В общем виде задача решена, можно сделать численную оценку эффекта.

Изменение направления вектора скорости максимально быстро происходит при малых значениях параметра η. Действительно, из формулы (5-89) следует

$$\left|\frac{d\alpha}{d\eta}\right| = \frac{1}{1+\eta^2}\,,$$

т.е. при $\eta \to 0$ изменение угла поворота стремится к своему максимальному значению. Но если $\eta << 1$, то $t << 1$ и $x_1 << 1$ (достаточно рассматривать только область положительных значений); эти условия описывают близость движущегося гироскопа к перигелию. Скорость движения здесь максимальна по величине

$$V \cong \frac{p}{T} = p\left(\frac{p^3}{4GM}\right)^{-1/2} = 2\sqrt{\frac{GM}{p}} \qquad (5\text{-}91)$$

но она остается относительно малой, поэтому формулу (5-90) можно записать в минимальном приближении

$$\omega_P \cong -\frac{1}{2T^3}\left(\frac{p}{c}\right)^2 = -\frac{V}{2p}\left(\frac{V}{c}\right)^2$$

(явно введена фундаментальная скорость c). Если ракета движется вокруг Солнца по параболе вблизи перигелия $p = 20\,млн.км$, то ее скорость, вычисленная по формуле (5-91), составляет $V \cong 160\,км/c$. Длина пути у перигелия равна примерно 1 млн. км, и чтобы преодолеть это расстояние, ракете потребуется около двух часов; при этом, конечно, выполняется условие $\Delta t/T << 1$. За это время угол кажущейся прецессии оси находящегося в ракете гироскопа составит $d\alpha \equiv \alpha - \alpha' = 6{,}8\cdot 10^{-9}\,рад$ – величину, практически не наблюдаемую из системы отсчета, неподвижной относительно Солнца.