## 5.4. НОВЫЕ ПРИМЕРЫ И ЭФФЕКТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ДВИЖЕНИЯ[60]

Общий анализ и приведенные примеры показывают, что кватернионная теория допускает состоятельное описание релятивистского неинерциального движения наблюдаемых объектов и самих наблюдателей. Это обстоятельство позволяет обратиться к постановке новых задач, решение которых выходит за рамки возможностей специальной теории относительности. Наиболее интересны модельные ситуации, соответствующие реальным физическим процессам и позволяющие рассчитать, по возможности, наблюдаемые эффекты.

В этом разделе рассматривается модель релятивистского неинерциального движения, связанная с наблюдением спутников планет Солнечной Системы, обсуждаются проблемы измерения времени и связанных с ним «парадоксов», а также приводится решение для релятивистского гармонического осциллятора.

**Релятивистский сдвиг спутников планет**

Как известно, линейная скорость Земли относительно Солнца составляет $V_E = 29{,}8\, км/с$. Относительно некоторой другой планеты Солнечной Системы эта скорость может быть больше (если Земля и планета в противостоянии по отношению к Солнцу) или меньше (в противоположном случае). При этом изменяется не только модуль, но и направление относительной скорости; т.е. система «Земля – другая планета» является неинерциальной парой. Несмотря на сравнительно небольшие скорости, в этой системе должны проявляться кинематические эффекты относительного движения. Расчет показывает, что один такой эффект связан с наблюдением с Земли спутников других планет.

Рассматривается часть Солнечной Системы, где Q-CO $\Sigma'$ связана с Землей, а вторая Q-CO $\Sigma$ принадлежит планете, вокруг которой с собственной циклической частотой $\omega(\Sigma)$ обращается спутник (рис. 5-12). Приближенно можно считать, что орбиты Земли и планеты – окружности с радиусами $R_E$ и $R_P$, при этом соответствующие линейные скорости относительно Солнца $V_E$ и $V_P$ постоянны. В данной модели траектория планеты, записанная в координатах наблюдателя, является плоской кривой,[61] вокруг наблюдаемого объекта осуществляется пространственное вращение, а относительная скорость движения двух систем отсчета есть функция времени. Эта кинематическая ситуация абсолютно идентична описанной выше для обобщенной прецессии Томаса, поэтому можно применить установленную для нее процедуру расчета.

Закон движения планеты в стабильно ориентированной системе координат Земли имеет вид

$$x_1 = R_P \cos\beta - R_E \cos\alpha\,,$$

$$x_2 = R_P \sin\beta - R_E \sin\alpha\,, \tag{5-92}$$

где углы смещения планет относительно оси абсцисс в системе координат Солнца

$$\alpha = \Omega_E\, t'\,, \qquad \beta = \Omega_P\, t'\,, \tag{5-93}$$

выражаются через орбитальные циклические частоты

$$\Omega_E = V_E / R_E \qquad \Omega_P = V_P / R_P\,,$$

при этом релятивистская коррекция времени «земного» наблюдателя по отношению к «солнечному» игнорируется, поскольку эти поправки скажутся только во втором порядке приближения.

---

[60] Результаты этого параграфа опубликованы в работах [119], [113].

[61] Из списка выпадает Плутон, орбита которого заметно наклонена к плоскости эклиптики и для земного наблюдателя не будет плоской кривой; впрочем, в силу удаленности непросто наблюдать саму эту планету, не говоря уже о ее возможных спутниках, наличие которых пока не установлено.

Наблюдаемая с Земли и истинная круговая частота обращения спутника связаны между собой стандартным соотношением типа (5-79)

$$\omega(\Sigma') = \omega(\Sigma)\cosh\psi(t'),$$

где присутствует зависимость лишь от величины параметра гиперболического поворота. Поэтому из уравнений (5-92) достаточно найти модуль относительной скорости

$$V^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = V_E^2 + V_P^2 - 2V_E V_P \cos(\alpha - \beta) = \tanh^2\psi. \tag{5-94}$$

В течение некоторого достаточно малого промежутка времени земной наблюдатель экспериментально определяет величину $\omega(\Sigma')$, например, поделив $2\pi$ на период обращения спутника, измеренный по своим часам. Пусть это измерение происходит в момент времени $t'_0$, когда скорости Земли и планеты направлены параллельно

$$\omega(t'_0) = \omega(\Sigma)\cosh\psi(t'_0) \cong \omega(\Sigma)\left[1 + \frac{1}{2c^2}(V_E^2 + V_P^2 - 2V_E V_P)\right]$$

(в явном виде показан символ фундаментальной скорости).

Пренебрегая эффектами относительного движения, наблюдатель может считать эту частоту постоянной и вычислить теоретический «нерелятивистский» угол поворота спутника на орбите за некоторое время

$$\varphi_{theor}(t') = \omega(t'_0)\,t'.$$

Реально измеряемый угол включает релятивистский эффект, который зависит от времени, поскольку, согласно формулам (5-93) и (5-94), от времени зависит относительная скорость

$$\varphi_{real}(t') = \int \omega(\Sigma')\,dt' = \omega\int \cosh\psi(t')\,dt' \cong \omega t' \left\{\left[1 + \frac{1}{2c^2}(V_E^2 + V_P^2)\right] - \frac{V_E V_P}{c^2}\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}\right\}.$$

Разность реально измеренного и вычисленного углов есть

$$\Delta\varphi = \varphi_{theor} - \varphi_{theor} \cong \frac{\omega V_E V_P}{c^2}\left[1 - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta}\right] t'. \tag{5-95}$$

Второе «слагаемое» в квадратных скобках со временем стремится к нулю, поскольку в знаменателе разность углов растет, а числитель ограничен единицей, поэтому для больших значений времени формула (5-95) приобретет простой вид

$$\Delta\varphi \cong \frac{\omega V_E V_P}{c^2} t'. \tag{5-96}$$

Из уравнения (5-96), во-первых, следует, что для земного наблюдателя спутник обращается вокруг планеты быстрее, чем показывает расчет. Во-вторых, – и это весьма примечательное свойство – эффект накапливается прямо пропорционально времени наблюдения. Можно оценить возможность его экспериментальной регистрации.

Выбор подходящих для расчета наблюдаемых планет Солнечной Системы и их быстрых естественных спутников невелик. Среди близких к Солнцу сравнительно быстро движущихся планет, имеющих спутники – только Марс и Юпитер. Самый быстрый известный спутник – у Юпитера – Метис имеет орбитальный период 0,29 земных суток (циклическая частота обращения $\omega = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,c^{-1}$). Орбитальная скорость Юпитера составляет $V_J = 13{,}1\,км/c$. За один «юпитерианский» год, равный 4332 земных суток (примерно 11,8 земных лет), наблюдаемый с Земли угловой сдвиг Метиса составит

$$\Delta\varphi \cong \frac{2{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 29{,}8\cdot 13{,}1}{(2{,}99\cdot 10^{5})^{2}}\cdot 4{,}33\cdot 10^{3}\cdot 24\cdot 3600 \cong 4{,}1\cdot 10^{-4}\ \textit{рад} = 1{,}4'.$$

Поскольку радиус орбиты Метиса составляет 128 000 км, этот сравнительно небольшой угловой сдвиг эквивалентен линейному смещению наблюдаемого положения спутника относительно расчетного

$$\Delta l = r\,\Delta\varphi = 128000\cdot 4{,}1\cdot 10^{-4} = 52\,\textit{км},$$

что несколько больше характерного размера спутника, равного 40 км.

Ниже приводится сравнительная таблица углового и линейного релятивистского сдвига спутников Марса, а также нескольких быстрых и весьма заметных спутников Юпитера, наблюдаемых в течение 100 лет.[62]

| **РЕЛЯТИВИСТСКИЙ СДВИГ СПУТНИКОВ МАРСА И ЮПИТЕРА** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| время наблюдения | лет | 100 | | | | | | | |
| скорость Земли | км/с | 29,8 | | | | | | | |
| скорость света | км/с | 300000 | | | | | | | |
| ПЛАНЕТА ее скорость | км/с | Марс | 24,1 | Юпитер | 13,1 | | | | |
| СПУТНИК: | | Фобос | Деймос | Метис | Адрастея | Амальтея | Теба | Ио | Европа |
| орбитальный период | зем.сут. | 0,32 | 1,26 | 0,29 | 0,30 | 0,50 | 0,67 | 1,77 | 3,55 |
| орбитальный период | с | 27570 | 109037 | 25469 | 25770 | 43044 | 58277 | 152928 | 306720 |
| радиус орбиты | км | 9378 | 23459 | 128000 | 129000 | 181300 | 222000 | 422000 | 671000 |
| циклическая частота | 1/с | 0,00023 | 0,00006 | 0,00025 | 0,00024 | 0,00015 | 0,00011 | 0,00004 | 0,00002 |
| угловой сдвиг | рад | 0,00574 | 0,00145 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0020 | 0,0015 | 0,0006 | 0,0003 |
| угловой сдвиг | угл.мин | 18,2 | 4,6 | 10,6 | 10,5 | 6,3 | 4,7 | 1,8 | 0,9 |
| длина сдвига | км | 54 | 34 | 431 | 429 | 361 | 327 | 237 | 188 |
| характерный размер | км | 20 | 12 | 40 | 20 | 189 | 100 | 3600 | 3200 |

Из таблицы видно, что даже такие крупные спутники Юпитера как Ио и Европа «уходят вперед» на своих орбитах примерно по 2 километра в год.

### Способы измерения времени [63]

Известно – и приведенные примеры это подтверждают, – что многие релятивистские эффекты оказываются следствием «неодновременности» одного и того же события, наблюдаемого из разных систем отсчета (подробно об этом см. в книге [76]). В связи с этим проблема понимания сути и измерения времени становится существенной. При этом речь идет, конечно, не о философском осмыслении самого понятия времени; здесь оно рассматривается как физическая величина, адекватно определяемая в рамках теории или как технологический инструмент, необходимый для экспериментальных оценок.

В ньютоновской механике время абсолютно, и вопрос о его природе и способах измерения не актуален, поскольку в любой точке пространства все (и любые) часы равноправны и мгновенно синхронизированы.

В теории относительности ситуация заметно усложняется: временные масштабы в разных системах отсчета зависят от относительной скорости наблюдателей, а синхронизация часов осуществляется с учетом конечной скорости передачи сигнала. При этом постулат о фундаментальной скорости, по существу, «навязывает» определенный инструмент для

---

[62] Фактические данные о планетах и спутниках взяты из источника [68].
[63] Результаты этого раздела опубликованы в работах [122], [123].

измерения времени – линейку.[64] Временной интервал становится эквивалентным длине отрезка, отсюда один шаг до геометризации теории.

Тем не менее, во многих работах по специальной теории относительности традиционно предполагается, что измерение времени осуществляется наблюдателями с помощью обычных часов, показания которых основаны на циклических процессах. Именно с таким предположением связано утверждение о том, что в неинерциальных системах отсчета часы идут «неправильно», поскольку на них влияют силы инерции;[65] это утверждение закладывается в основу объяснения известного парадокса часов. Такая ссылка на свойства осциллятора в рамках теории, естественным измерительным прибором которой является линейка, представляется логическим противоречием. К тому же, в силу ограниченности возможностей специальной теории относительности, есть недостаток в детальном анализе поведения колебательных систем в разных системах отсчета. Чуть ниже такой анализ будет предложен в рамках кватернионного релятивизма.

Но прежде стоит сделать несколько замечаний о проблеме определения времени во многих системах отсчета. Эта проблема, связанная с введением направления изменения времени, возникает уже в четырехмерной модели пространства-времени и особенно интенсивно обсуждается при изучении решений и формальных построений общей теории относительности (определение хронометрически инвариантных величин, выделение гиперповерхностей одновременности, построение канонического формализма в ОТО).[66] Столь же насущна эта проблема и для рассматриваемой кватернионной модели, где направление изменения времени задается строго ортогонально плоскости, образованной пространственными векторами.

При наличии сравнительно небольшого числа $N+1$ объектов (или частиц) наблюдатель в избранной Q-CO $\Sigma$ может записать точное соотношение времен для каждого из наблюдаемых им объектов в виде $N$ соотношений типа

$$\underset{(1)}{d}\,\underset{(1)}{t'}\,\underset{(1)}{\mathbf{p}_{1'}} = \underset{(1)}{d}\,\underset{(1)}{t}\,\underset{(1)}{\mathbf{p}_1} + \underset{(1)}{d}\,\underset{(1)}{r}\,\underset{(1)}{\mathbf{q}_2}\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\underset{(N)}{d}\,\underset{(N)}{t'}\,\underset{(N)}{\mathbf{p}_{1'}} = \underset{(N)}{d}\,\underset{(N)}{t}\,\underset{(N)}{\mathbf{p}_1} + \underset{(N)}{d}\,\underset{(N)}{r}\,\underset{(N)}{\mathbf{q}_2}\,, \tag{5-96}$$

где индексы в скобках указывают номер наблюдаемого объекта (рис. 5-13). Существенно, что векторы всех Q-триад имеют, вообще говоря, различные направления, поскольку по-разному направлены скорости каждой из частиц, измеренные $\Sigma$-наблюдателем. При этом проекция изменения времени на некоторые выбранные направления может быть отрицательной величиной; это означает, что каждый отдельный кинематический процесс является обратимым. Пользуясь формулами (5-96), можно вычислить любые соотношения между $\underset{(1)}{t'}$, ... , $\underset{(N)}{t'}$ как функциями времени наблюдателя $t$. Хотя это время разное для всех систем отсчета и измеряется линейкой, но по свойству обратимости оно близко времени классической механики.

Если же наблюдается большое количество объектов, то для определения временных соотношений приходится прибегать к некоторой процедуре усреднения.

---

64 Это обстоятельство не представляется странным, поскольку на практике, любым прибором человек имеет возможность измерить единственную физическую величину – длину.

65 Так в книге Я.Терлецкого [69] на стр. 43 сказано: «… во время ускорения ход удаленных часов может сильно изменяться за счет инерциального гравитационного поля» (см. также книгу Э.Шмутцера [70]).

66 См., например, работу [71], книги Ю.С.Владимирова [72], В.Д.Захарова [73], др. [57].

Пусть имеется в целом инерциальный (например, покоящийся) ансамбль частиц, каждая из которых может достаточно быстро перемещаться. Простейшая схема определения среднего по ансамблю времени

$$d\mathbf{t}_{cp} \equiv \frac{1}{N}\sum_{A=1}^{N}\left( d\underset{(A)}{t'}\,\underset{(A)}{\mathbf{p}_{1'}} \right) = \frac{1}{N}\sum_{A=1}^{N}\left( d\underset{(A)}{t}\,\underset{(A)}{\mathbf{p}_{1}} + d\underset{(A)}{r}\,\underset{(A)}{\mathbf{q}_{2}} \right)$$

не может быть использована, поскольку в неподвижном «облаке» скорости частиц распределены по направлениям изотропно, и в каждом направлении распределение по величине скорости в среднем одинаково (например, в виде распределения Максвелла).

Вторая простая схема – определение средней квадратичной величины – вполне подходит для равнораспределенных векторных величин. Пусть среднее квадратичное время по ансамблю определяется так

$$\overline{d\,t'} \equiv \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{A=1}^{N}\left( d\underset{(A)}{t'}\,\underset{(A)}{\mathbf{p}_{1'}} \right)^2} = \frac{dt}{N}\sqrt{\sum_{A=1}^{N}\left( \underset{(A)}{\mathbf{p}_{1}} + \underset{(A)}{V}\,\underset{(A)}{\mathbf{q}_{2}} \right)^2} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{N}\sum_{A=1}^{N}\underset{(A)}{V}^{2}}\ . \qquad (5\text{-}97)$$

Если частицы движутся со сравнительно небольшими скоростями, то в слаборелятивистском пределе связь изменения времени среднего наблюдателя и изменения среднего по ансамблю времени определяется формулой

$$d\,t = \frac{\overline{d\,t'}}{\sqrt{1 - \frac{1}{N}\sum_{A=1}^{N}\underset{(A)}{V}^{2}}} \cong \overline{d\,t'}\left( 1 + \frac{1}{2N c^2}\sum_{A=1}^{N}\underset{(A)}{V}^{2} \right), \qquad (5\text{-}98)$$

в последнем равенстве в явном виде введен символ фундаментальной скорости. Пусть массы всех частиц близки по величине и равны $m$; тогда формулу (5-98) можно представить в виде

$$d\,t \cong \overline{d\,t'}\left( 1 + \frac{1}{mc^2}\frac{m\overline{V^2}}{2} \right) = \overline{d\,t'}\left( 1 + \frac{\overline{K}}{E_0} \right),$$

где

$$\overline{V^2} \equiv \frac{1}{N}\sum_{A=1}^{N}\underset{(A)}{V}^{2}, \qquad \overline{K} \equiv \frac{m\overline{V^2}}{2}, \qquad E_0 \equiv m c^2,$$

$\overline{K}$ есть средняя кинетическая энергия частицы, $E_0$ – ее полная собственная энергия. Наконец, выражение кинетической энергии через постоянную Больцмана $k$ и абсолютную температуру ансамбля $T$ приводит к последнему варианту формулы (5-98)

$$d\,t \cong \overline{d\,t'}\left( 1 + \frac{3k}{2}\frac{T}{E_0} \right). \qquad (5\text{-}99)$$

Определенное формулами (5-97) и (5-99) «групповое», или «статистическое» время среднего наблюдателя необратимо и может только возрастать, поскольку положительно определенным является изменение времени покоящегося ансамбля $\overline{d\,t'} > 0$. Применяется такое время исключительно по договоренности между всеми наблюдателями в данном ансамбле. Можно сказать, что, по существу, данная схема определения «группового» времени реально используется в практической деятельности, причем в подавляющем большинстве случаев релятивистские поправки оказываются ненужными и игнорируются.

**О парадоксе часов и времени жизни мезонов**

Известный «парадокс часов», или «парадокс близнецов», возникающий, как считается, в специальной теории относительности, за почти 100 лет многократно обсужден и сегодня практически повсеместно воспринимается как физический факт. Основа его – все то же соотношение времен

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - V^2} \ , \qquad (5\text{-}100)$$

согласно которому интервал времени $\Delta t'$ в движущейся системе отсчета $\Sigma'$, измеренный с позиций наблюдателя в базе $\Sigma$, оказывается короче, чем его собственный интервал $\Delta t$. В кватернионной теории эта проблема, конечно, остается и ее стоит обсудить. Краткое описание модели таково.

Системы отсчета $\Sigma$ и $\Sigma'$, в каждой из которых за процессом наблюдают братья-близнецы, движутся относительно друг друга, но в начальный момент времени они находятся рядом и часы их синхронизированы. Q-CO $\Sigma'$ достаточно долго удаляется от $\Sigma$, затем за малый промежуток времени изменяет направление скорости на обратное, и в результате два близнеца снова оказываются рядом и сверяют часы. Утверждается, что, с точки зрения базы $\Sigma$, для которой верно соотношение (5-100), возраст близнеца-путешественника будет меньше, чем возраст $\Sigma$-наблюдателя. Однако если базой является Q-CO $\Sigma'$, то тогда уже в движущейся Q-CO $\Sigma$ интервал времени оказывается меньше, при этом другой близнец должен оказаться моложе. В этом и состоит «парадокс».

Как уже отмечалось выше, многие авторы склонны искать разрешение дилеммы в неравноправии систем отсчета отмечая, что в период неинерциального движения часы и все процессы (в том числе биологические) в $\Sigma'$ по-настоящему замедляются, поэтому реально моложе окажется $\Sigma'$-близнец. Иллюстрацией при этом, как правило, служит пространственно-временная диаграмма Минковского (например, из книги [69], стр. 44).

Представляется, что этот заслуживающий внимания аргумент, во-первых, не является универсальным, поскольку имеет в виду лишь один способ измерения времени – с помощью обычных часов (эталонных периодических процессов). Измерение же интервалов времени линейкой не обсуждается, и причина этого отчасти понятна: неинерциальное движение наблюдателя не сказывается на метрических свойствах жесткой линейки и не отменяет постулата о постоянстве фундаментальной скорости; в этих условиях парадокс близнецов остается не объясненным.

Во-вторых, стоит заметить, что не лишним является и более детальное изучение схемы измерения интервалов времени с помощью периодических процессов. Кватернионная теория возможность такого анализа предоставляет, в том числе, и для неинерциальных кинематических систем. Но вначале уместно рассмотреть процедуру измерения времени с применением осциллятора в системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью.

<u>Измерение времени осциллятором в инерциальных системах отсчета</u>.

Пусть инструментом измерения времени служит осциллятор («пружинный маятник») с собственным периодом колебаний $T$ (с циклической частотой $\omega$). Тогда «число секунд» в интервале времени $\Delta t$ есть

$$n = \frac{\Delta t}{T} \ ,$$

или

$$n \sim \omega \, \Delta t \ . \qquad (5\text{-}101)$$

«Груз» маятника может рассматриваться наблюдателем базы $\Sigma$ как релятивистская частица, которая движется относительно него, например, вдоль вектора $\mathbf{q}_2$ со скоростью

$$u(t) = \tanh \eta = U \cos \omega \, t \ .$$

Анализ движения удобно проводить не на диаграмме Минковского, а на диаграмме скоростей, введенной в разделе 5.2. Для простоты чтения здесь приводится ее упрощенный вариант (рис. 5-4а).

Если амплитуда скорости сравнительно мала $U \ll 1$, то параметр гиперболического поворота пропорционален гармонике

$$\eta \sim \cos \omega t \, .$$

На диаграмме значению этого параметра однозначно соответствует длина дуги $\mathbf{AK}$

$$|\mathbf{AK}| \sim \eta \sim \cos \omega t \, . \qquad (5\text{-}102)$$

Пусть идентичный осциллятор есть в системе отсчета $\Sigma'$, движущейся относительно Q-CO $\Sigma$ также вдоль вектора $\mathbf{q}_2$ со скоростью $V = \tanh \psi$. С позиции $\Sigma'$-наблюдателя для него можно записать соотношение, аналогичное (5-102)

$$|\mathbf{BM}| \sim \eta' \sim \cos \omega' t' \, .$$

Длины дуг $\mathbf{AK}$ и $\mathbf{BM}$, измеренные каждая своим наблюдателем, очевидно, равны. Но согласно выведенному в разделе 5.2 правилу сложения гиперболических углов, проведенный параллельно оси $OY$ отрезок $MN$ отсекает на первой гиперболе дугу $\mathbf{BN}$, длина которой равна длине дуги $\mathbf{BM}$. Геометрическое равенство длин дуг имеет своим следствием соотношение

$$\cos \omega t \sim |\mathbf{AK}| = |\mathbf{BN}| \sim \cos \omega' t' \, , \qquad (5\text{-}103)$$

верное при условии

$$\omega t = \omega' t' \, . \qquad (5\text{-}104)$$

Дуга $\mathbf{BN}$ принадлежит $\Sigma$-гиперболе, это означает, что все величины в соотношениях (5-103), (5-104) измеряются наблюдателем в базе $\Sigma$. Частоты колебаний предполагаются постоянными, поэтому

$$\omega \, \Delta t = \omega' \, \Delta t' \, ,$$

откуда, с учетом определения (5-101), следует вывод: «число секунд», измеренное часами базы $\Sigma$ равно «числу секунд», отсчитанному $\Sigma$-наблюдателем по часам движущейся относительно него Q-CO $\Sigma'$. Аналогична и обратная ситуация: с точки зрения $\Sigma'$-наблюдателя «число делений» в отрезках времени базы $\Sigma'$ и движущейся относительно нее Q-CO $\Sigma$ одинаково. Таким образом, в инерциальных системах отсчета проблемы «парадокса часов» нет.

Теперь стоит уделить внимание процедуре измерения вообще. Представляется, что любое измерение есть акт сравнения некоторой экспериментально полученной величины с эталоном, безусловным в заданных условиях. Так, наверное, стоит согласиться с тем, что обычная пространственная длина не имеет абсолютного смысла, но определяется как отношение отрезка $\Delta l$ к эталону (единице) длины $L$, так что результат измерения есть безразмереное число

$$N = \frac{\Delta l}{L} \, ,$$

измеряемое, однако, в единицах длины $[N] = см$, если $L = 1 см$. В движущейся системе отсчета единица $L$ «сокращается» точно так же, как длина $\Delta l$. Поэтому неподвижный наблюдатель насчитает в пролетающей мимо него линейке ровно столько же «сантиметров», сколько он насчитывает в такой же линейке, которую держит в руках. Когда две линейки оказываются неподвижными относительно друг друга, сомнения в равенстве их длин нет. Но если неподвижный наблюдатель оценивает размер движущегося относительно него пространственного отрезка, на котором «не видно» «делений», то он вынужден использовать собственный стандарт длины, и именно это обстоятельство порождает эффект наблюдаемого «сокращения длин».

Именно такая ситуация возникает с измерением времени (или, как отмечено выше, – с определением «числа секунд»): на временных отрезках нет «нанесенных делений». Но «число секунд», подсчитанное часами в $\Sigma'$, остается равным тому, что подсчитано в $\Sigma$, потому что $\Sigma'$-единица времени (период маятника часов $T'$), измеренная в базе $\Sigma$, претерпевает точно такое же «сокращение», как весь отрезок времени $\Delta t'$.

Впрочем, еще раз стоит напомнить, что наиболее естественным прибором для измерения времени в теории относительности является не прибор, основанный на подсчете числа стандартных периодов, а обычная жесткая линейка. В кватернионном релятивизме она размещается в «мнимой» части пространственно-временного континуума.

Измерение «чужим стандартом» характерно для известной задачи о мезонах.

<u>О времени жизни атмосферных мезонов</u>.

Проблема «наблюдаемого» времени жизни мезона, образующегося в верхнем слое земной атмосферы под действием космических лучей, широко обсуждена в литературе как с теоретических, так и с экспериментальных позиций.[67] На опыте отмечено, что мезоны, движущиеся со скоростями, близкими по величине к фундаментальной скорости, «живут» до распада дольше, чем такие же мезоны, «покоящиеся» относительно наблюдателя. Теоретическое объяснение этого факта во всех источниках одинаково и кратко. В лабораторной системе отсчета $\Sigma$ наблюдаемое и собственное время жизни мезона связаны соотношением (5-100)

$$\Delta t = \Delta t' \cosh \psi ,$$

так что

$$\Delta t(\Sigma) > \Delta t'(\Sigma) . \qquad (5\text{-}105)$$

Интерпретация выражения (5-105) как увеличения времени жизни мезона обычно проводится без проведения в явной форме собственно процедуры измерения, то есть определения, сколько раз на длине отрезка укладывается избранный эталон. Вместо этого «по умолчанию» полагается, что правильной единицей измерения является единица времени наблюдателя в лаборатории $T(\Sigma) \equiv 1$. Если же эту процедуру измерения формально выполнить, то время жизни мезона («число секунд») определяется следующим образом

$$\tau'(\Sigma) \equiv \frac{\Delta t'}{T(\Sigma)} > \frac{\Delta t}{T(\Sigma)} = \tau(\Sigma) . \qquad (5\text{-}106)$$

Видно, что в таком подходе собственное время жизни движущегося мезона определяется в неподвижной системе отсчета, что нелогично, ибо собственное время (и собственная длина) определяются системе отсчета, где объект покоится. Хотя неравенство (5-106), конечно, верно.

Более корректным представляется рассуждение с позиций системы отсчета $\Sigma'$, где мезон является телом отсчета и где определено «правильное» время его жизни. В базе $\Sigma'$ движение мезона из верхних слоев атмосферы до земли (~ 25 км) моделируется в виде пролетающей мимо линейки длиной $\Delta l'$. В базе $\Sigma'$ единицы длины (определенные мгновенно) связаны стандартным соотношением

[67] Подробное описание экспериментов в см. работах [74], [75]; теоретическое обсуждение дано, например, в книгах [76], [77].

$$L' = L\cosh\psi\ , \tag{5-107}$$

так что длина пролетающей линейки для $\Sigma'$-наблюдателя

$$\lambda'(\Sigma') \equiv \frac{\Delta l'}{L'} = \frac{\Delta l'}{L}\frac{1}{\cosh\psi} \equiv \frac{\lambda'(\Sigma)}{\cosh\psi}\ ,$$

измеренная в $\Sigma'$-единицах оказывается меньше, чем в единицах Q-CO $\Sigma$. Скорость относительного движения систем отсчета равна $V$, следовательно истинное время жизни мезона, измеренное в базе $\Sigma'$, и кажущееся время его жизни с точки зрения $\Sigma$-наблюдателя связаны соотношением

$$\tau'(\Sigma') \equiv \frac{\lambda'(\Sigma')}{V} = \frac{\lambda'(\Sigma)}{V}\frac{1}{\cosh\psi} \equiv \frac{\tau'(\Sigma)}{\cosh\psi}\ ,$$

или

$$\tau'(\Sigma) = \tau'(\Sigma')\cosh\psi\ , \qquad \tau'(\Sigma) > \tau'(\Sigma')\ . \tag{5-108}$$

Кажущееся время жизни мезона, измеренное в лаборатории, оказывается больше его собственного времени жизни, определенного в его собственной системе отсчета. Как видно, в этой логически согласованной схеме расчета процедура измерения применена для длин без обращения к измерению отрезков времени.

Если же измерять время непосредственно, то к результату (5-108) можно придти еще быстрее. В базе мезона $\Sigma'$ единицы времени связаны соотношением, аналогичным (5-107)

$$T' = T\cosh\psi\ ,$$

Пусть жизни мезона соответствует интервал времени $\Delta t'$, тогда собственная «длина» этого интервала

$$\tau'(\Sigma') \equiv \frac{\Delta t'}{T'} = \frac{\Delta t'}{T}\frac{1}{\cosh\psi} \equiv \frac{\tau'(\Sigma)}{\cosh\psi}$$

оказывается меньше кажущейся «длины», измеренной в лаборатории.

Анализ корректности метрических процедур оказывается весьма полезным и при изучении проблемы «парадокса часов» в неинерциальных системах отсчета.

**Релятивистский гармонический осциллятор**

Математический аппарат кватернионной теории относительности позволяет исследовать поведение неинерциально движущихся часов. Естественной моделью таких часов является линейный гармонический осциллятор («пружинный маятник»), положение «груза» которого в начальный и конечный момент одного колебания совпадает с положением наблюдателя в инерциальной системе отсчета, а относительная скорость движения в эти моменты равна нулю.

Пусть $\Sigma$ представляет инерциальную систему отсчета, а $\Sigma'$ – неинерциальная Q-CO, тело отсчета которой подвергается воздействию периодической силы вдоль выделенной прямой линии (рис. 5-14). Это пример относительного движения вдоль прямой линии с переменной скоростью. Поскольку интерес сосредоточен на кинематических соотношениях, природа действующей силы не существенна.

Случай А: $\Sigma'$ наблюдается из $\Sigma$. Инерциальная Q-CO $\Sigma$ представлена постоянной триадой $\mathbf{q}_k$. Если направление относительного движения выбрано вдоль вектора $\mathbf{q}_2$, то уравнение поворота, связывающего две системы отсчета, имеет вид

$$\Sigma' = H_3^{\psi(t')}\,\Sigma\ ,$$

где $H_3^{\psi(t')}$ – $3\times 3$-матрица простого гиперболического поворота вокруг оси, параллельной $\mathbf{q}_3$ с переменным параметром $\psi(t')$, зависящим от $\Sigma'$-времени. Первая строка уравнения поворота

$$\mathbf{q}_{1'} = \cosh\psi\,\mathbf{q}_1 - i\sinh\psi\,\mathbf{q}_2\,,$$

при стандартных условиях

$$\cosh\psi = \frac{dt'}{dt}\,, \qquad V = \tanh\psi$$

эквивалентна BQ-векторному интервалу

$$d\mathbf{z} = idt'\mathbf{q}_{1'} = idt\,\mathbf{q}_1 + dx\,\mathbf{q}_2\,, \tag{5-109}$$

так что направление времени в $\Sigma$ параллельно вектору $\mathbf{q}_1$, а в $\Sigma'$ – вектору $\mathbf{q}_{1'}$. Из соотношения (5-109) следуют основные кинематические Q-векторные характеристики. Например, для Q-CO $\Sigma'$ вычисляются Q-скорость

$$\mathbf{v}' \equiv \frac{d\mathbf{z}}{idt'} = \mathbf{q}_{1'}$$

и Q-ускорение

$$\mathbf{a}' \equiv \frac{d\mathbf{v}'}{idt'} = \frac{d\mathbf{q}_{1'}}{idt'} = -i\omega_{1'2'}\mathbf{q}_{2'} \equiv a'\,\mathbf{q}_{2'}\,. \tag{5-110}$$

При этом единственная отличная от нуля компонента Q-связности

$$\omega_{1'2'} = i\frac{d\psi}{dt'}$$

вычисляется по стандартной формуле

$$\omega' = \frac{dH}{dt'}H^{-1}\,.$$

Таким образом, модуль Q-ускорения (5-110), направленного вдоль $\mathbf{q}_{2'}$, просто выражается через параметр относительной скорости

$$a'(\Sigma') = \frac{d\psi}{dt'}\,.$$

По ускорению, или по «силе инерции», которую чувствует наблюдатель в движущейся системе отсчета, можно судить о виде самого движения.[68] Так, для прямолинейного равноускоренного движущегося наблюдателя ускорение постоянно [формула (5-46) параграфа 5.3].[69]

То же можно сказать о движении рассматриваемого в данной задаче $\Sigma'$-наблюдателя: он движется по гармоническому закону, если его ускорение (сила на единицу массы) изменяется по правилу косинуса в зависимости от собственного времени

$$a'(\Sigma') = \frac{d\psi}{dt'} = \Omega'\beta\cos\Omega' t'\,; \tag{5-111}$$

---

[68] Стоит уточнить, что речь идет лишь о тех «силах», которые вызваны изменением направления и модуля скорости наблюдателя в плоском физическом пространстве.
[69] См. также [65], стр. 39.

здесь $\Omega'$ и $\beta$ – постоянные, при $t'=0$ ускорение максимально. Интегрирование уравнения (5-111) дает зависимость гиперболического параметра от собственного времени $\Sigma'$-наблюдателя

$$\psi(t') = \beta \sin \Omega' t' . \tag{5-112}$$

Постоянная интегрирования в (5-112) – начальная фаза – выбрана нулевой, чтобы в начальный момент времени параметр относительной скорости и сама скорость были равны нулю. Интересно отметить, что именно параметр скорости, а не сама относительная скорость, наблюдаемая из Q-CO $\Sigma$, является здесь гармонической функцией.

Теперь можно решить полную задачу кинематики для рассматриваемого случая, то есть найти координату, скорость и ускорение $\Sigma'$ как функции времени инерциального $\Sigma$-наблюдателя.

Но предварительно, проинтегрировав уравнение соотношения времен, следующее из (5-109)

$$dt' = dt \cosh \psi(t') ,$$

следует определить зависимость времени $\Sigma'$ от времени $\Sigma$

$$t = \int \cosh \psi(t')\, dt' = \int \cosh(\beta \sin \Omega' t')\, dt' \ .$$

Несложный анализ показывает, что этот интеграл может быть вычислен точно, но не в элементарных функциях, а в виде ряда. Для получения результата вначале нужно применить известное разложение гиперболического косинуса в ряд

$$\mathrm{ch}\, u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} u^{2n} , \qquad |u| < \infty ,$$

(последнее условие всегда удовлетворяется, поскольку $u \equiv \beta \sin \Omega' t' < \infty$)
а затем использовать табличный интеграл[70]

$$\int \sin^{2n} y\, dy = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} y + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin(2n-2k)y}{2n-2k} \tag{5-113}$$

Замена в последнем выражении обозначения $y \equiv \Omega' t'$ дает искомую зависимость

$$t = t' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \left[ \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} t' + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin(2n-2k)\,\Omega' t'}{(2n-2k)\,\Omega'} \right]. \tag{5-114}$$

Имея этот результат, стоит вспомнить, что возможность получения точных интегралов в теории относительности является отличительной чертой физически простых и корректно сформулированных задач, таких как задачи о гиперболическом движении и движении по окружности. Задача о гармоническом осцилляторе определенно включается в этот избранный круг.

Одно колебание завершается, когда $\Omega' T' = 2\pi$, где $T'$ – период колебания в $\Sigma'$. Соответствующий период в $\Sigma$ есть $T$, и из уравнения (5-114) сразу следует соотношение периодов

$$T = T' \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \right), \tag{5-115}$$

а, следовательно, – циклических частот

---

[70] См., например, [78].

$$\Omega' = \Omega\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{(2n)!}\,\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right). \qquad (5\text{-}116)$$

Согласно соотношению (5-116) наблюдаемая из Q-CO $\Sigma$ частота оказывается меньше, чем определенная для $\Sigma'$.[71]

Уравнение (5-114), очевидно нельзя обратить, то есть выразить $\Sigma'$-время как функцию $\Sigma$-времени, поэтому приходится искать зависимость $t'(t)$ в приближении. Первые несколько членов ряда (5-114) записывают как

$$t = t' + \frac{\beta^2}{4}\left(t' - \frac{1}{2\Omega'}\sin 2\Omega' t'\right) + \frac{\beta^4}{8\cdot 4!}\left[3t' - \frac{1}{\Omega'}\left(\frac{1}{4}\sin 4\Omega' t' - 2\sin 2\Omega' t'\right)\right] + \ldots$$

при этом безразмерный фактор $\beta$ можно представить в виде

$$\beta = v / c << 1,$$

где $v$ – константа, приближенно равная амплитуде относительной скорости. Тогда с точностью до членов, включающих $\beta^2$, можно записать следующие соотношения частоты и времени

$$\Omega' = \Omega\left(1 + \frac{\beta^2}{4}\right), \qquad t' = t - \frac{\beta^2}{4}\left(t - \frac{1}{2\Omega}\sin 2\Omega t\right). \qquad (5\text{-}117)$$

Подстановка этих величин в выражение для параметра скорости (5-112) позволяет найти приближенные решения задачи кинематики для базы $\Sigma$.

Скорость Q-CO $\Sigma'$, наблюдаемая из $\Sigma$

$$V(t) = c\tanh\left(\beta \sin \Omega' t'\right) \cong v \sin\Omega t\left(1 - \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{7}{12}\beta^2\cos^2\Omega t\right).$$

В начале и в конце периода скорость имеет минимальное значение $V(T) = 0$, то есть в начальный и конечный момент каждого колебания две рассматриваемые системы отсчета неподвижны относительно друг друга. Максимальное значение скорости

$$V(T/2) = v\left(1 - \frac{1}{3}\beta^2\right)$$

есть «V-амплитуда»

$$\widetilde{V} = v\left(1 - \frac{1}{3}\beta^2\right).$$

С учетом последнего обозначения функция скорости приобретает вид

$$V(t) \cong \widetilde{V}\sin\Omega t\left(1 + \frac{7}{12}\beta^2\cos^2\Omega t\right), \qquad (5\text{-}118)$$

согласно которому наблюдаемое из $\Sigma$ движение определенно не является гармоническим.

Ускорение Q-CO $\Sigma'$, наблюдаемое из $\Sigma$

$$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} \cong \Omega\widetilde{V}\cos\Omega t\left(1 - \frac{7}{6}\beta^2 + \frac{7}{4}\beta^2\cos^2\Omega t\right).$$

[71] Как отмечалось выше в анализе проблем измерения времени, при наблюдении из Q-CO $\Sigma$ кинематические величины $\Sigma'$ не являются истинными, а таковыми, как они представляются $\Sigma$-наблюдателю, поскольку «по умолчанию» они измеряются в стандартах $\Sigma$. Там, где это необходимо подчеркнуть, база обычно указывается в скобках; для обсуждаемых величин можно записать $T(\Sigma)$, $\Omega(\Sigma)$, $T'(\Sigma)$, $\Omega'(\Sigma)$.

Минимальное значение ускорения, конечно, равно нулю

$$a(T/2) = 0\,,$$

а максимальное значение, или «$a$-амплитуда», определяется как

$$a(T) = \Omega\widetilde{V}\left(1 - \frac{7}{12}\beta^2\right) = \widetilde{A}\,.$$

Окончательно функция ускорения есть

$$a(t) \cong \widetilde{A}\cos\Omega t\left(1 - \frac{7}{4}\beta^2 \sin^2 \Omega t\right). \qquad (5\text{-}119)$$

Координата Q-СО Σ′, наблюдаемая из Σ

$$x(t) = \int V(t)dt \cong x_0 - \frac{\widetilde{V}}{\Omega}\cos\Omega t\left(1 + \frac{7}{36}\beta^2 \cos^2 \Omega t\right). \qquad (5\text{-}120)$$

Константа интегрирования

$$x_0 = \frac{\widetilde{V}}{\Omega}\left(1 + \frac{7}{36}\beta^2\right)$$

выбрана так, чтобы удовлетворялись естественные условия

$$x(0) = x(T) = 0\,, \qquad x(T/4) = x_0\,, \qquad x(T/2) = 2\,x_0\,.$$

Таким образом, задача кинематики для $\Sigma$ -наблюдателя решена в приближении $\beta << 1$: она представлена уравнениями (5-117), (5-118), (5-119), (5-120).

<u>Случай В: Q-СО Σ наблюдается из Σ′</u>.

Уравнение поворота для этого случая имеет вид

$$\Sigma = H_3^{-\psi(t')}\,\Sigma'\,, \qquad (5\text{-}121)$$

в нем тот же параметр поворота

$$\psi = \beta \sin \Omega' t'$$

описывает гармонические колебания Q-СО $\Sigma'$. Первая строка уравнения (5-121) представляет пространственно-временной интервал

$$idt\mathbf{q}_1 = idt'\,\mathbf{q}_{1'} - dx'\,\mathbf{q}_{2'}$$

где $dx'$ – пространственное перемещение $\Sigma$, $dt'$ – соответствующее изменение времени, измеренные движущимся наблюдателем. Собственное Q-ускорение инерциальной Q-СО $\Sigma$, конечно, исчезает

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{q}_1}{idt} = 0\,,$$

так что задача кинематики решается для величин, «видимых» наблюдателем истинно ускоренной Q-СО $\Sigma'$.

Из записанного для данного случая соотношения времен

$$dt' = dt \cosh \psi(t')$$

следует выражение $\Sigma$ -времени как функции времени $\Sigma'$-наблюдателя

$$t = \int \frac{dt'}{\cosh \psi(t')} = \int \operatorname{sech}(\beta \sin \Omega' t')\, dt'\,. \qquad (5\text{-}122)$$

Этот интеграл также вычисляется точно в силу существования разложения[72]

$$\operatorname{sech} u = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!} u^{2n}, \qquad |u| < \pi / 2 \tag{5-123}$$

и табличного интеграла (5-113), уже использованного в случае A. Ряд (5-123) включает числа Эйлера

$$E_n \equiv \frac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}},$$

а условие его сходимости всегда удовлетворяется

$$|u| \equiv |\beta \sin \Omega' t'| < \pi / 2,$$

поскольку

$$\beta = V / c < 1, \qquad \sin \Omega' t' < 1.$$

Результат интегрирования (5-122) есть

$$t = t' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_n \beta^{2n}}{(2n)!} \left[ \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} t' + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \frac{\sin(2n-2k)\Omega' t'}{(2n-2k)\Omega'} \right]. \tag{5-123}$$

Отсюда следуют соотношения периодов и циклических частот

$$T = T' \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_n \beta^{2n}}{(2n)! 2^{2n}} \binom{2n}{n} \right), \qquad \Omega' = \Omega \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n E_n \beta^{2n}}{(2n)! 2^{2n}} \binom{2n}{n} \right), \tag{5-124}$$

естественно, отличные от аналогичных соотношений (5-116) и (5-117) случая A.[73]

Здесь (в случае B) уже нет необходимости обращать ряд, так как все функции предполагаются зависящими от $\Sigma'$-времени, а уравнение (5-124) лишь задает отношение между собственной $t'$ и «наблюдаемой» $t$ длиной временных линий. Тем не менее, представляется полезным выписать первые несколько членов ряда (5-124)

$$t = t' - \frac{\beta^2}{4} \left( t' - \frac{1}{2\Omega'} \sin 2\Omega' t' \right) + \frac{5\beta^4}{16 \cdot 4!} \left[ t' + \frac{1}{\Omega'} \left( 2 \sin 4\Omega' t' - 4 \sin 2\Omega' t' \right) \right] + \ldots \tag{5-125}$$

Сравнивая $\beta^2$-приближение ряда (5-125) с аналогичным разложением (5-117), можно заметить «обратную симметрию» функций времени наблюдателей в случаях A и B, что является вполне ожидаемым результатом при изменении базы наблюдения.

В случае B задача кинематики целиком решается точно.

Скорость Q-CO $\Sigma$, наблюдаемая из $\Sigma'$

$$V'(t') = c \tanh \left( \beta \sin \Omega' t' \right). \tag{5-126}$$

Полезно рассмотреть приближение с точностью до члена ряда, содержащего $\beta^2 = (v/c)^2$

$$V'(t') \cong v \sin \Omega' t' \left( 1 - \frac{\beta^2}{3} \sin^2 \Omega' t' \right).$$

Минимальное значение скорости – ноль $V(T') = 0$: в начале и в конце каждого колебания системы отсчета относительно друг друга неподвижны. Максимальное значение скорости, или «V-амплитуда» есть

---

[72] См., например, [63].

[73] В этом случае измеренные $\Sigma'$-наблюдателем величины $T'(\Sigma')$, $\Omega'(\Sigma')$ являются истинными.

$$\tilde{V}'(T'/2) = c \tanh \frac{v}{c}.$$

Ускорение Q-CO Σ, наблюдаемое из Σ′

$$a'(t') = \frac{dV(t')}{dt'} = \frac{v\Omega' \cos \Omega' t'}{\cosh^2(\beta \sin \Omega' t')}, \qquad (5\text{-}127)$$

или в $\beta^2$ -приближении

$$a'(t') = \frac{dV(t')}{dt'} \cong \Omega \tilde{V} \cos \Omega t \left(1 - \beta^2 \sin^2 \Omega' t'\right).$$

Минимальное и максимальное значения ускорения соответственно равны

$$a'(T'/2) = 0, \quad a'(T') = v\Omega'.$$

Координата Q-CO Σ, наблюдаемая из Σ′

$$x'(t') = \int V'(t')dt' = \int c \tanh(\beta \sin \Omega' t')dt'.$$

И эта функция интегрируется точно, поскольку гиперболический тангенс представим в виде сходящегося ряда

$$\tanh u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} u^{2n-1}, \qquad |u| \equiv |\beta \sin \Omega' t'| < \pi/2,$$

где коэффициенты

$$B_n \equiv \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^{k-1} \frac{(2n+1)(2n)...(2n-k+2)}{k!} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k-1} m^{2n}$$

называются числами Бернулли, и существует табличный интеграл

$$\int \sin^{2n-1} y \, dy = \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} \frac{\cos(2n-1-2k)y}{2n-1-2k};$$

введено обозначение $y \equiv \Omega' t'$.

В результате зависимость координаты от времени такова

$$x'(t') = x_0 + \frac{c}{\Omega'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} \beta^{2n-1} \frac{(-1)^n}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n-1}{k} \frac{\cos(2n-1-2k)\Omega' t'}{2n-1-2k}, \qquad (5\text{-}128)$$

а $\beta^2$ -приближение этой функции имеет вид

$$x'(t') = x'_0 - \frac{v}{\Omega'} \cos \Omega' t' \left[1 - \frac{1}{3}\beta^2 \left(1 - \frac{1}{3}\cos^2 \Omega t\right)\right].$$

Константа интегрирования

$$x'_0 = \frac{v}{\Omega'}\left(1 - \frac{2}{3}\beta^2\right)$$

выбрана так, чтобы выполнялись условия

$$x'(0) = x'(T') = 0, \qquad x'(T'/4) = x'_0, \qquad x'(T'/2) = 2x'_0.$$

Таким образом, для $\Sigma'$ -наблюдателя задача кинематики имеет точное решение, представленное формулами (5-126), (5-127), (5-128); указано также слаборелятивистское приближение при $\beta \ll 1$.

Еще раз о парадоксе близнецов

Как отмечалось выше в этом разделе, «классическая» формулировка парадокса часов в ее наиболее яркой (можно сказать, эмоциональной) форме предполагает участие близнецов, один из которых непременно находится в неинерциальной системе отсчета.

Рассмотренная модель релятивистского осциллятора весьма подходит для обсуждения этого «парадокса», поскольку в начале и в конце каждого колебания две Q-CO не только по-настоящему неподвижны относительно друг друга, но и положения их строго совпадают. Немаловажен и тот факт, что кинематика модели в ключевых позициях, касающихся соотношения времен, представлена точными решениями. Уже упоминалось, что проблема парадокса часов связана с корректностью процедуры измерения временных отрезков. Кратко суть в том, что интервалы времени двух разных наблюдателей, измеренные с помощью «эталонной единицы» одного из них, будут иметь разную длину. Если же каждый интервал измеряется своей единицей, то проблема снимается так же, как ее нет при измерении пространственных отрезков: движущаяся линейка кажется короче, но имеет столько же сантиметров, сколько равная ей, но находящаяся в покое. Успешной иллюстрацией к этому объяснению служит модель релятивистского осциллятора, кстати, еще и потому, что он может рассматриваться как прибор для измерения времени сразу в обеих системах отсчета.

На рис. 15-15 изображена соответствующая диаграмма Минковского, представленная с позиций неподвижной Q-CO $\Sigma$. Пусть отрезками времени, предназначенными к измерению, являются «наблюдаемые» из $\Sigma$ периоды $T$ и $T'$, связанные соотношением (5-115). Пусть «$\Sigma$-секундой» (единицей измерения времени) является величина $\tau \equiv T/4 = \pi/2\Omega$. Тогда «длина» отрезка $T$ составляет 4 «секунды». Период $T'$, измеренный в единицах $\tau$, оказывается очевидно короче, т.е. возвращающийся в исходную точку близнец-путешественник якобы кажется моложе своего брата-наблюдателя.

Это пример применения некорректной процедуры измерения, поскольку для $\Sigma$-наблюдателя изменяется не только длина $\Sigma'$-временного отрезка, но также и размер $\Sigma'$-временной единицы. Для получения правильного результата следует использовать адекватно измененные единицы, “$\Sigma'$-секунды”

$$\tau' = \tau\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^{-1},$$

в данном конкретном случае все одинаковые. Тогда «длина» отрезка $T'$ также оказывается равна 4 секундам.

Если на своем пути $\Sigma'$-близнец через каждую свою секунду посылает световые сигналы, то $\Sigma$-наблюдатель получает их нерегулярно, но всего за время путешествия таких сигналов будет ровно 4. Последним сигналом наблюдатели обменяются в самом конце путешествия, так что при встрече возраст близнецов окажется в точности одинаков. Кроме того, на рис. 5-15 показано, что проекции различных отрезков $\Sigma'$-времени на линию времени Q-CO $\Sigma$ также различны, но они изменяются постепенно, как гладкие функции, и в трех точках относительной неподвижности двух систем отсчета (точки 0-0’, 2-2’ и 4-4’) их единицы времени плавно становятся одинаковыми. Это означает, что в данной модели нет «потерянного времени» или «прыжка единиц», о которых иногда говорят, обсуждая неинерциальной движение с позиций специальной теории относительности (см., например, [69]).

Несложно проверить, что с позиций базы $\Sigma'$ картина выглядит аналогично, несмотря на очевидное неравноправие систем отсчета по свойствам инерциальности.