5.5. ВАРИАНТ УРАВНЕНИЙ КВАТЕРНИОННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

В главе 4, где в формализме кватернионных систем отсчета рассмотрены уравнения динамики Ньютона, замечено, что для классической механики естественными являются преобразования репера с действительными параметрами и связанные с ними вращательные ускорения. Ускорения трансляционного движения (бустов), как показано в первых параграфах главы 5, напрямую связаны с гиперболическими вращениями, естественными уже для релятивистской механики. Таким образом, в рассматриваемом кватернионном формализме механика частицы (или системы отсчета), описывающая все виды ускорений, может быть только релятивистской. Однако, процедура логического построения уравнений такой механики встречает ряд трудностей, обсуждаемых в этом параграфе.

BQ-импульс частицы

Для описания релятивистской динамики частицы в качестве исходного можно равно выбрать уравнения классической механики (4-2) или уравнения релятивистской кинематики (5-23).

Методически легче начать с релятивистского случая. Пусть две частицы, имеющие массу покоя соответственно M_0 и m_0, взаимодействуют друг с другом. Пусть при этом частица с массой M_0 является телом отсчета релятивистского репера Σ, а частица с m_0 – соответственно телом отсчета репера Σ'. Пусть также при этом вначале Σ' наблюдается из репера Σ так, что пространственный вектор наблюдателя (имеющий, к примеру, номер 2) всегда параллелен относительной скорости наблюдаемого движения.[74] При этом уравнение (5-23) принимает вид

$$d\mathbf{z}_\Sigma = i\,dt'\mathbf{q}_{1'} = i\,dt\,\mathbf{q}_1 + dr\,\mathbf{q}_2\,, \qquad (5.5\text{-}1)$$

где индекс «Σ» указывает базу и учтено, что Σ'-наблюдатель в собственном репере покоится. Геометрическая ситуация, описываемая уравнением (5.5-1), соответствует гиперболическому повороту репера Σ с параметром η, так что

$$dt = dt'\cosh\eta\,.$$

Стоит напомнить, что уравнение (5.5-1) представляет собой компактную запись свойства форм-инвариантности бикватернионного (BQ) векторного «интервала» $d\mathbf{z}$ относительно группы «кватернионного релятивизма» $SO(1,2) \in SO(3,C)$. Компактное представление (5.5-1) является достаточным в том смысле, что репер $\mathbf{q}_k$, являясь функцией времени наблюдателя, может иметь в пространстве любую из всех возможных в нем ориентаций.

Делением уравнения (5.5-1) на dt получается формула BQ- вектора собственной скорости Σ' (с точки зрения базы Σ)

$$\frac{d\mathbf{z}_\Sigma}{dt'} \equiv \mathbf{V}'_\Sigma = i\mathbf{q}_{1'}\,, \qquad (5.5\text{-}2)$$

С другой стороны, BQ-скорость, измеренная в Q-СО Σ, есть

$$\frac{d\mathbf{z}_\Sigma}{dt} \equiv \mathbf{V}_\Sigma = i\,\mathbf{q}_1 + v\,\mathbf{q}_2\,; \qquad (5.5.\text{-}3)$$

где v – модуль скорости относительного движения. Из (5.5-2) и (5.5-3) следует, что BQ-вектор скорости не является инвариантом

$$\mathbf{V}'_\Sigma = \cosh\eta\,\mathbf{V}_\Sigma\,. \qquad (5.5\text{-}4)$$

---

[74] В этом случае Q-СО Σ можно назвать репером, следящим за скоростью.

Домножением последнего выражения на массу покоя частицы (или тела отсчета Q-CO Σ') m_0' определяется соответствующий BQ-вектор импульса. Если при этом считать верным соотношение массы покоя и наблюдаемой массы движения

$$m = m_0 \cosh\eta\ , \tag{5.5-5}$$

принятое в эйнштейновской СТО,[75] то из соотношения (5.5-4) следует замечательный вывод: BQ-вектор импульса частицы форм-инвариантен относительно группы кватернионного релятивизма SO(1,2)

$$\mathbf{P}_\Sigma' \equiv m_0 \mathbf{V}_\Sigma' = m\,\mathbf{V}_\Sigma = \mathbf{P}_\Sigma\,. \tag{5.5-6}$$

Использование BQ-вектора импульса и свойства его инвариантности представляется удобным для попытки записи уравнения релятивистской динамики.

Соотношение ускорений (1): Σ' наблюдается из Σ

Пусть внешний вид уравнений релятивистской динамики совпадает с видом уравнений Ньютона: импульс частицы изменяет сумма действующих на нее сил. Это предположение, во-первых, облегчает формальное выполнение принципа соответствия в нерелятивистском пределе, а во-вторых, не вносит никаких ограничений, поскольку связано лишь с системой обозначений неких физических величин.

В условиях рассматриваемой задачи, определенных соотношением (5.5-1), можно определять изменение BQ-импульса частицы, по крайней мере, с двух позиций: как его непосредственно измеряет (вычисляет) Σ-наблюдатель и как с точки зрения того же Σ-наблюдателя это измеряет наблюдатель в Q-CO Σ'.

Измерения Σ'-наблюдателя.

В соответствии с формулой (5.5-2) для Σ'-наблюдателя BQ-импульс его собственного тела отсчета есть

$$\mathbf{P}_\Sigma' \equiv m_0\, i\, c\, \mathbf{q}_{1'}\,; \tag{5.5-7}$$

здесь в явном виде введен символ фундаментальной скорости c. В правой части (5.5-7) все величины постоянны, кроме единственного присутствующего вектора репера, направленного вдоль изменения времени и зависящего только от времени Σ'-наблюдателя t'. Изменение импульса с течением этого времени вычисляется по формуле

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma'}{dt'} \equiv m_0\, i\, c\,(\underset{t'}{\omega_{1'2'}}\, \mathbf{q}_{2'} + \underset{t'}{\omega_{1'3'}}\, \mathbf{q}_{3'})\,; \tag{5.5-8}$$

где компоненты Q-связности получаются из стандартного определения производной репера

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}_k \equiv \omega_{kn}\, \mathbf{q}_n\ ,$$

а индекс под символом Q-связности указывает, в каком времени вычислена эта величина. Из условий (5.5-1), (5.5-7) рассматриваемой задачи следует, что в правой части уравнения (5.5-8) содержатся только пространственные составляющие связности. Выше, в параграфах 5.3 [формулы (5-45), (5-63)] и 5.4 [формула (5-110)] на ряде специальных примеров показано, что такого рода составляющие связности есть не что иное как компоненты собственного ускорения Σ'-наблюдателя измеряемые в его собственном времени. Действительно, Q-скорость частицы

[75] Соотношение (5.5-5) во многих формулировках СТО интерпретируется как универсальное (хотя внимание обычно на этом не акцентируется), то есть масса движущейся частицы определяется формулой (5.5-5) вне зависимости от направления скорости относительного движения. Но иногда, начиная с первых публикаций по СТО Эйнштейна [81], [82], различие между продольной – измеренной вдоль направление скорости, – и поперечной массой движущегося тела подчеркивается; см., например, [83].

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{z}}{dt'}$$

в покоящемся репере имеет единственную компоненту, ассоциированную с вектором изменения времени, например, $\mathbf{v} = ic\mathbf{q}_{1'}$. При этом Q-ускорение содержит лишь две пространственные компоненты

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt'} = ic\frac{d}{dt}\mathbf{q}_{1'} = ic\,(\omega_{1'2'}\mathbf{q}_{2'} + \omega_{1'3'}\mathbf{q}_{3'}) = a_{2'}\mathbf{q}_{2'} + a_{3'}\mathbf{q}_{3'}.$$

Отсюда следуют соотношения между компонентами Q-связности и собственного ускорения репера

$$\underset{t'}{\omega_{1'2'}} = -i\,\underset{t'}{a_{2'}}/\,c\,, \qquad \underset{t'}{\omega_{1'3'}} = -i\,\underset{t'}{a_{3'}}/\,c\,, \tag{5.5-9}$$

с учетом которых уравнение (5.5.-8) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{P}'_{\Sigma}}{dt'} = m_0\,(\underset{t'}{a_{2'}}\,\mathbf{q}_{2'} + \underset{t'}{a_{3'}}\,\mathbf{q}_{3'})\,. \tag{5.5-10}$$

Если сделать формальную замену величин

$$m_0\,\underset{t'}{a_{2'}} \equiv \underset{t'}{F_{2'}}\,, \qquad m_0\,\underset{t'}{a_{3'}} \equiv \underset{t'}{F_{3'}}\,,$$

где $\underset{t'}{F_{2'}}$, $\underset{t'}{F_{3'}}$ - компоненты некоторой силы, действующей на тело массы m_0, то можно записать уравнения динамики для тела отсчета Σ'

$$\frac{d\mathbf{P}'_{\Sigma}}{dt'} = \underset{t'}{F_{2'}}\,\mathbf{q}_{2'} + \underset{t'}{F_{3'}}\,\mathbf{q}_{3'} \tag{5.5-11}$$

так, как они, с точки зрения Σ-наблюдателя, должны выглядеть в репере Σ'. Из уравнений (5.5-11) следует лишь то, что Σ'-наблюдатель может с помощью приборов измерить пространственные компоненты действующей на него силы и, зная значение собственной массы покоя, вычислить величину испытываемого им ускорения.

Измерения Σ-наблюдателя.

BQ-импульс частицы (тела отсчета) наблюдаемой Q-CO Σ' с точки зрения Σ-наблюдателя есть

$$\mathbf{P}_{\Sigma} \equiv m_0 \cosh\eta\,(i\,c\,\mathbf{q}_1 + v\,\mathbf{q}_2)\,; \tag{5.5-12}$$

здесь также в явном виде введен символ фундаментальной скорости *c*; параметр гиперболического поворота η и векторы репера суть функции времени наблюдателя *t*.

Теперь изменение импульса того же тела рассматривается во времени Σ-наблюдателя, что также указывает символ под величиной

$$\frac{d\mathbf{P}_{\Sigma}}{dt} \equiv m_0[\underset{t}{\dot\eta}\sinh\eta\,(ic\mathbf{q}_1 + v\mathbf{q}_2) +$$

$$+\cosh\eta\,(ic\underset{t}{\omega_{12}}\,\mathbf{q}_2 + ic\underset{t}{\omega_{13}}\,\mathbf{q}_3 + \underset{t}{\dot v}\,\mathbf{q}_2 + v\underset{t}{\omega_{21}}\,\mathbf{q}_1 + v\underset{t}{\omega_{23}}\,\mathbf{q}_3)]\,; \tag{5.5-13}$$

здесь в правой части уравнения есть коэффициенты при всех трех направлениях репера: двух пространственных ($\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$) и одном временном ($\mathbf{q}_1$), так что формула (5.5-13) требует упрощения и интерпретации. Этому способствуют следующие преобразования и обозначения.

В выражении (5.5-13) есть производные по времени и от модуля относительной скорости, и от гиперболического параметра, однозначно связанного с модулем скорости стандартным соотношением

$$\frac{v}{c} = \tanh\eta \ ,$$

откуда следует

$$\underset{t}{\dot{v}}\cosh^2\eta = c\underset{t}{\dot{\eta}}\,. \tag{5.5-14}$$

Чтобы оставить в формуле (5.5-13) производные от модуля скорости (но не от параметра η), множитель при первой круглой скобке правой части (5.5-13) с помощью тождества (5.5-14) можно записать в удобной в данном случае форме

$$\underset{t}{\dot{\eta}}\sinh\eta \equiv \underset{t}{\dot{v}}\frac{v}{c^2}\cosh^2\eta \ .$$

В свою очередь, компоненты связности аналогично (5.5-9) представляют линейные ускорения репера Σ

$$\underset{t}{\omega_{12}} = -i\,\underset{t}{a_2}/c\,, \qquad \underset{t}{\omega_{13}} = -i\,\underset{t}{a_3}/c\,, \tag{5.5-15}$$

и угловую скорость его вращения

$$\underset{t}{\omega_{23}} = \underset{t}{\omega_1} \equiv \underset{t}{\omega} \tag{5.5-16}$$

вокруг направления оси времени для достижения условия коллинеарности вектора $\mathbf{q}_2$ с направлением вектора скорости относительного движения **v**. Теперь, после простых преобразований и группировки коэффициентов при векторах репера, уравнение (5.5-13) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} \equiv m[\frac{v}{c}(\underset{t}{\dot{v}}\cosh^2\eta + \underset{t}{a_2})\,i\mathbf{q}_1 + (\underset{t}{\dot{v}}\cosh^2\eta + \underset{t}{a_2})\,\mathbf{q}_2 + (v\underset{t}{\omega} + \underset{t}{a_3})\,\mathbf{q}_3\,]\,. \tag{5.5-17}$$

Наоборот, если оставить в формуле (5.5-13) производные от параметра η (но не от модуля относительной скорости), то эта формула приобретает несколько более компактный вид

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} = m[\frac{v}{c}(c\underset{t}{\dot{\eta}} + \underset{t}{a_2})\,i\mathbf{q}_1 + (c\underset{t}{\dot{\eta}} + \underset{t}{a_2})\,\mathbf{q}_2 + (v\underset{t}{\omega} + \underset{t}{a_3})\,\mathbf{q}_3\,]\,. \tag{5.5-18}$$

В формулах (5.5-17), (5.5-18) заметны следующие факты:

1) все величины измеряются не в запаздывающем времени Σ-наблюдателя, а так, как будто наблюдаемый репер Σ′ находится пространственно рядом с репером Σ; это тем более так, что расстояние между частицами (телами двух систем отсчета) пока не определено,

2) коэффициент в квадратных скобках при временном направлении $i\mathbf{q}_1$ с точностью до множителя $\frac{v}{c} \equiv \tanh\eta$ совпадает с коэффициентом при $\mathbf{q}_2$; последний имеет очевидный смысл визуально наблюдаемого из репера Σ тангенциального ускорения частицы Σ′,

3) коэффициент в квадратных скобках при $\mathbf{q}_3$, в свою очередь, должен трактоваться как визуально измеренное Σ-наблюдателем нормальное ускорение частицы Σ′.

Соотношению (5.5-18) также можно придать форму уравнений Ньютона

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} = \underset{t}{F_1'}\, i\mathbf{q}_1 + \underset{t}{F_2'}\, \mathbf{q}_2 + \underset{t}{F_3'}\, \mathbf{q}_3, \tag{5.5-19}$$

где

$$\underset{t}{F_2'} = m(c\underset{t}{\dot\eta} + \underset{t}{a_2}), \qquad \underset{t}{F_3'} = m(v\underset{t}{\omega} + \underset{t}{a_3}) \tag{5.5-20}$$

– пространственные компоненты силы, действующей на тело отсчета репера Σ' с точки зрения базы Σ и измеренные во времени наблюдателя. Но помимо этих ожидаемых компонент, появляется и «временная» компонента силы

$$\underset{t}{F_1'} = m\frac{v}{c}(c\underset{t}{\dot\eta} + \underset{t}{a_2}) \ ,$$

имеющая, впрочем, «индуцированную» природу в силу замеченной выше линейной зависимости коэффициентов уравнения (5.5-18) при $i\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, то есть

$$\underset{t}{F_1'} = \frac{v}{c}\underset{t}{F_2'} .$$

Действительно, получается так, что изменение модуля скорости, вызванное тангенциальной «силой» $\underset{t}{F_2'}$ индуцирует точно соответствующее изменение масштаба времени. Так что наличие «временной» компоненты «силы», тесно связанной с причиной касательного ускорения, с точки зрения Σ-наблюдателя, не только вполне естественно, но и необходимо.

Уравнения (5.5-19) так же как (5.5-11) не могут использоваться для решения задач динамики, поскольку компоненты сил в них записаны формально и как функции параметров динамической системы пока не определены. Однако формулы (5.5-18) или (5.5-19) позволяют установить связь между компонентами собственного ускорения репера Σ' и его ускорения, наблюдаемого из базы Σ, для этого достаточно представить уравнения (5.5-10) в координатах и времени Σ-наблюдателя.

Замена в (5.5-10) штрихованного базиса на нештрихованный

$$\mathbf{q}_{1'} = \cosh\eta\,\mathbf{q}_1 - i\sinh\eta\,\mathbf{q}_2, \qquad \mathbf{q}_{2'} = i\sinh\eta\,\mathbf{q}_1 + \cosh\eta\,\mathbf{q}_2, \qquad \mathbf{q}_{3'} = \mathbf{q}_3$$

с одновременной заменой производной по Σ'-времени на производную по времени базы Σ

$$\frac{d}{dt'} = \cosh\eta\frac{d}{dt}$$

приводит к выражению

$$\cosh\eta\frac{d\mathbf{P}_\Sigma'}{dt} = m_0\cosh\eta\ [\underset{t}{a_{2'}}(i\sinh\eta\ \mathbf{q}_1 + \cosh\eta\,\mathbf{q}_2) + \underset{t}{a_{3'}}\,\mathbf{q}_3) .$$

Но, согласно (5.5-6), $\mathbf{P}_\Sigma = \mathbf{P}_\Sigma'$, и после простых преобразований последнее соотношение преобразуется к виду

$$\frac{d\mathbf{P}_\Sigma}{dt} = m\ (\frac{v}{c}\underset{t}{a_{2'}}\, i\mathbf{q}_1 + \underset{t}{a_{2'}}\,\mathbf{q}_2 + \frac{1}{\cosh\eta}\underset{t}{a_{3'}}\,\mathbf{q}_3), \tag{5.5-21}$$

идентичному по смыслу уравнению (5.5-18). Так Σ-наблюдатель определяет изменение импульса тела отчета Σ' – но выраженное теперь в терминах собственных ускорений последнего (и вычисленных во времени базы Σ). Это означает, что в уравнениях (5.5-18) и (5.5-21) коэффициенты при соответствующих векторах репера Σ могут быть приравнены.

Равенство коэффициентов при векторе $\mathbf{q}_1$ дает тот же результат, что и их сопоставление при $\mathbf{q}_2$

$$c\underset{t}{\dot{\eta}} + \underset{t}{a_2} = \underset{t}{a_{2'}} \,, \tag{5.5-22}$$

равенство коэффициентов при $\mathbf{q}_3$ имеет своим следствием соотношение

$$v\underset{t}{\omega} + \underset{t}{a_3} = \frac{1}{\cosh\eta}\underset{t}{a_{3'}} \,. \tag{5.5-23}$$

Прежде, чем проанализировать формулы (5.5-22) и (5.5-23), стоит отметить, что совершенно такие же соотношения естественным образом следуют из преобразования уравнений (5.5-18) к виду (5.5-10). Действительно, переход в (5.5-18) к реперу Σ'

$$\mathbf{q}_1 = \cosh\eta\,\mathbf{q}_{1'} + i\sinh\eta\,\mathbf{q}_{2'}\,, \qquad \mathbf{q}_2 = -i\sinh\eta\,\mathbf{q}_{1'} + \cosh\eta\,\mathbf{q}_{2'}\,, \qquad \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{3'}$$

и к производной по штрихованному времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\cosh\eta}\frac{d}{dt'}$$

с учетом инвариантности вектора импульса дает

$$\frac{d\mathbf{P}'_{\Sigma}}{dt'} = m_0\,[\,(c\underset{t'}{\dot{\eta}} + \underset{t'}{a_2})\,\mathbf{q}_{2'} + \cosh\eta(v\underset{t'}{\omega} + \underset{t'}{a_3})\,\mathbf{q}_{3'}\,]\,.$$

Так, с точки зрения Σ-наблюдателя собственные ускорения репера Σ' в его времени выражаются через ускорения наблюдаемые в базе Σ. Сравнение с (5.5-10) приводят к соотношениям

$$\underset{t'}{a_{2'}} = c\underset{t'}{\dot{\eta}} + \underset{t''}{a_2}\,, \qquad \underset{t'}{a_{3'}} = \cosh\eta\,(v\underset{t'}{\omega} + \underset{t'}{a_3})\,,$$

которые, в силу однородности и линейности по членам с производными по времени, тождественны соотношениям (5.5-22) и (5.5-23).

<u>Анализ полученных соотношений</u>.
Соотношения (5.5-22) и (5.5-23) удобно переписать в виде

$$c\underset{t}{\dot{\eta}} = \underset{t}{a_{2'}} - \underset{t}{a_2}\,, \tag{5.5-24}$$

$$v\underset{t}{\omega} = \frac{1}{\cosh\eta}\underset{t}{a_{3'}} - \underset{t}{a_3}\,; \tag{5.5-25}$$

каждое из них можно трактовать как с физических, так и с геометрических позиций.

Сначала физическая интерпретация.

Уравнение (5.5-24) описывает изменение гиперболического параметра в зависимости от касательных ускорений реперов Σ' и Σ. Более точно, скорость изменения гиперболического параметра со временем определяется разностью собственных касательных ускорений реперов Σ' и Σ, измеренных соответствующими наблюдателями (с точки зрения базы Σ и в ее времени). Здесь полезно отметить следующее:

- в левую часть уравнения в качестве «кинематического ускорения» входит не изменение относительной скорости (как это имеет место в нерелятивистском случае), а изменение параметра скорости – это характерная черта релятивизма;

- тангенциальные ускорения реперов, измеренные в одном и том же времени (либо Σ, либо Σ′), появляются в уравнении в «чистом виде», без каких либо поправочных коэффициентов.

Левая часть уравнения (5.5-25) – «кинематическое ускорение» поворота базы – есть векторное произведение взаимно перпендикулярных векторов: скорости относительного движения (вдоль $\mathbf{q}_2$) и угловой скорости поворота репера Σ′ (вокруг $\mathbf{q}_1$); правая же часть содержит нормальные ускорения реперов. Таким образом, данное уравнение означает: скорость изменения направления векторов базы Σ определяется разностью собственных нормальных ускорений реперов Σ′ и Σ, измеренных соответствующими наблюдателями (с точки зрения базы Σ и в ее времени). Стоит отметить, что в этом уравнении собственное нормальное ускорение наблюдаемого репера Σ′ появляется уже с уменьшающим коэффициентом $\cosh^{-1}\eta < 1$.

Если считать, что ускорения реперов обусловлены лишь их взаимодействием, то можно рассматривать предельные случаи. Так, например, если масса M_0 базы Σ велика по сравнению с массой m_0 наблюдаемого репера Σ′, то компоненты собственного ускорения Σ малы $\underset{t}{a_2} << \underset{t}{a_{2'}}$, $\underset{t}{a_3} << \underset{t}{a_{3'}}$ и ими можно пренебречь; тогда «кинематические ускорения» – скорость изменения гиперболического параметра и скорость изменения направления поворота векторов базы – полностью определяются компонентами собственного ускорения репера Σ′. Естественно, возможно и обратное: если $m_0 >> M_0$, то малы собственные ускорения Σ′; тогда наблюдаемые «кинематические ускорения» оказываются кажущимися, поскольку репер Σ′ фактически инерциален, а ускоренно движется наблюдатель в базе Σ. Эти замечания могут быть полезными при рассмотрении прикладных задач релятивистской динамики, записанной в данном формате.

Геометрическая интерпретация.

Поскольку при получении анализируемых уравнений эффективно использовались первые производные (по времени) от векторов того или иного Q-репера и, следовательно, компоненты Q-связности, можно предположить, что соотношения (5.5-24) и (5.5-25) некоторым образом связаны с формулами преобразования Q-связности от одного переменного репера к другому. Общего вида формула преобразования связности приведена в Главе 2;[76] однако здесь полезно воспроизвести краткий ее вывод для рассматриваемого специального случая.

Пусть имеются два переменных (зависящих от времени t) Q-репера, связанные соотношением

$$\mathbf{q}_{k'} = O_{k'j}\,\mathbf{q}_j\,, \qquad \mathbf{q}_j = O_{n'j}\,\mathbf{q}_{n'}\,. \tag{5.5-26}$$

Тогда производная по времени от штрихованного репера есть

$$\frac{d}{dt}\mathbf{q}_{k'} = \omega_{k'n'}\,\mathbf{q}_{n'} = \frac{d}{dt}O_{k'j}\;\mathbf{q}_j + O_{k'j}\,\underset{t}{\omega_{jm}}\,\mathbf{q}_m\,. \tag{5.5-27}$$

Возвращение в правую часть (5.5-27) с помощью (5.5-26) штрихованного базиса дает

$$\omega_{k'n'}\,\mathbf{q}_{n'} = \frac{d}{dt}O_{k'j}\;O_{n'j}\,\mathbf{q}_{n'} + O_{k'j}\,O_{n'm}\,\underset{t}{\omega_{jm}}\,\mathbf{q}_{n'}\,,$$

или, после освобождения от базиса,

[76] См. параграф «Дифференцирование Q-базиса и кватернионная связность», формула (2-63а).

$$\omega_{k'n'} = \frac{d}{dt} O_{k'j} \, O_{n'j} + O_{k'j} \, O_{n'm} \, \underset{t}{\omega}_{jm} \; . \tag{5.5-28}$$

Это и есть формула перехода от нештрихованной к штрихованной Q-связности, которая, как было отмечено ранее, конечно, не является тензором, и имеет в формуле преобразования неоднородный член – первый в правой части (5.5-28).

Пусть далее закон преобразования репера есть простое гиперболическое вращение вида

$$O_{n'j} \to H^{-\eta}_{\;3} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -i \sinh \eta & 0 \\ i \sinh \eta & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5-29}$$

как это имеет место в рассматриваемом случае уравнения (5.5-1). Тогда, например, компонента связности $\omega_{1'2'}$ определяется так

$$\omega_{1'2'} = \frac{d}{dt} H_{1'1} \, H_{2'1} + \frac{d}{dt} H_{1'2} \, H_{2'2} + (H_{1'1} \, H_{2'2} - H_{1'2} \, H_{2'1}) \underset{t}{\omega}_{12} \; . \tag{5.5-30}$$

Вычисления первых двух слагаемых правой части с учетом вида (5.5-29) дают

$$\frac{d}{dt} H_{1'1} \, H_{2'1} + \frac{d}{dt} H_{1'2} \, H_{2'2} = -i \underset{t}{\dot{\eta}} \, ,$$

тогда как последние два слагаемых есть просто

$$(H_{1'1} \, H_{2'2} - H_{1'2} \, H_{2'1}) \underset{t}{\omega}_{12} = \underset{t}{\omega}_{12} \; .$$

Подстановка последних соотношений в (5.5-30) с учетом принятых обозначений

$$\underset{t}{\omega}_{1'2'} = -i \, \underset{t}{a}_{2'} / c \, , \qquad \underset{t}{\omega}_{12} = -i \, \underset{t}{a}_{2} / c$$

приводит к формуле

$$-\frac{i}{c} \underset{t}{a}_{2'} = -i \underset{t}{\dot{\eta}} - \frac{i}{c} \underset{t}{a}_{2} \, ,$$

которая после умножения на $-ic$ в точности совпадает с (5.5-24). Можно проверить, что вычисление с помощью (5.5-28) компоненты связности $\omega_{1'3'}$ приведет точно к соотношению (5.5-25).

Таким образом, установлено, что полученные из физических соображений соотношения, связывающие наблюдаемые и собственные компоненты ускорения двух переменных реперов имеют внятный геометрический смысл – это всего лишь формулы преобразования кватернионной связности при переходе от одного переменного репера (базы Σ) – к другому (наблюдаемому реперу Σ').

Соотношение ускорений (2): Σ наблюдается из Σ'

Пусть механическая ситуация не изменилась, есть те же переменные Q-реперы, но теперь базой наблюдения является Σ'. Этот случай, как легко убедиться, отвечает преобразованию $\mathbf{q} = H^{\eta}_{3} \, \mathbf{q}'$, которому соответствует вид векторного интервала

$$d\mathbf{z} = i \, c dt \mathbf{q}_1 = i \, c dt' \mathbf{q}_{1'} + dr' \mathbf{q}_{2'} \, , \tag{5.5-31}$$

внешне похожий на свой аналог (5.5-1). При этом, однако, проекция относительной скорости на направление $\mathbf{q}_{2'}$ есть

$$v' \equiv \frac{dr'}{dt'} = c\tanh(-\eta) = -c\tanh\eta = -v\,.$$

Это означает, что в базе Σ' скорость наблюдаемого объекта Σ направлена противоположно той скорости, с которой ранее репер Σ', наблюдался из базы Σ; соотношение времен принимает вид

$$dt' = \cosh\eta\, dt\,.$$

BQ-импульс в базе Σ' есть

$$\mathbf{P}_{\Sigma'} \equiv M_0 ic\mathbf{q}_1 = M\,(i\,c\,\mathbf{q}_{1'} - v\,\mathbf{q}_{2'}) \equiv \mathbf{P}'_{\Sigma'}\,, \tag{5.5-32}$$

где $M = \cosh\eta\, M_0$.

Изменения BQ-импульса тел системы для каждого из наблюдателей (но все – с позиций базы Σ') вычисляются аналогично, тому, как это сделано в предыдущем параграфе: для Σ-наблюдателя

$$\frac{d\mathbf{P}_{\Sigma'}}{dt} = M_0\,(\underset{t}{a}_2\,\mathbf{q}_2 + \underset{t}{a}_3\,\mathbf{q}_3)\,, \tag{5.5-33}$$

для Σ'-наблюдателя

$$\frac{d\mathbf{P}'_{\Sigma'}}{dt} = M\,[-\frac{v}{c}(-c\,\underset{t}{\dot\eta} + \underset{t}{a}_{2'})\,i\mathbf{q}_{1'} + (-c\,\underset{t}{\dot\eta} + \underset{t}{a}_{2'})\,\mathbf{q}_{2'} + (-v\,\underset{t}{\omega}' + \underset{t}{a}_{3''})\,\mathbf{q}_{3'}]; \tag{5.5-34}$$

компоненты ускорений связаны с коэффициентами Q-связности прежними соотношениями

$$\underset{t}{a}_2 \equiv ic\,\underset{t}{\omega}_{12}\,, \qquad \underset{t}{a}_3 \equiv ic\,\underset{t}{\omega}_{13}\,,$$

$$\underset{t}{a}_{2'} \equiv ic\,\underset{t}{\omega}_{1'2'}\,, \quad \underset{t}{a}_{3'} \equiv ic\,\underset{t}{\omega}_{1'3'}\,, \quad \underset{t}{\omega}' \equiv \underset{t}{\omega}_{2'3'}\,.$$

Стоит также заметить, что здесь все вычисления осуществлены во времени репера Σ; потом следующие из (5.5-33), (5.5-34) соотношения ускорений будет легче сравнить с аналогичными соотношениями, полученными ранее, когда этот репер был базой (и измерения производились в его времени).

Переход в формуле (5.5-33) к штрихованному базису

$$\mathbf{q}_2 = -i\sinh\eta\,\mathbf{q}_{1'} + \cosh\eta\,\mathbf{q}_{2'}\,, \qquad \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{3'}\,,$$

с учетом условия инвариантности импульса (5.5-32) дает

$$\frac{d\mathbf{P}'_{\Sigma'}}{dt} = M\,(-\frac{v}{c}\underset{t}{a}_{2'}\,i\mathbf{q}_{1'} + \underset{t}{a}_{2'}\,\mathbf{q}_{2'} + \underset{t}{a}_{3''}\,\mathbf{q}_{3'})\,, \tag{5.5-35}$$

откуда после сравнения с формулой (5.5-34) и небольших преобразований следует пара искомых соотношений

$$c\,\underset{t}{\dot\eta} = \underset{t}{a}_{2'} - \underset{t}{a}_2\,, \tag{5.5-36}$$

$$v\,\underset{t}{\omega}' = \underset{t}{a}_{3'} - \frac{1}{\cosh\eta}\underset{t}{a}_3\,. \tag{5.5-37}$$

Как и в предыдущем случае, с физической точки зрения, эти соотношения связывают по отдельности касательные и нормальные составляющие ускорений, а с точки зрения геометрии имеют смысл преобразований Q-связности от одного переменного репера к другому. Сравнение их с аналогичной парой, полученной в базе Σ, позволяет установить следующее:

1) соотношения (5.5-36) и (5.5-24), устанавливающие зависимость скорости изменения гиперболического параметра от собственных касательных ускорений реперов, оказываются в точности эквивалентными; в каком-то смысле это понятно: величина параметра скорости не зависит от выбора базы, поэтому уравнения, задающие ее изменения в любой из баз, должны быть похожими;
2) соотношения (5.5-37) и (5.5-25) определяют ускорение вращения каждого из реперов, а эта величина, кроме инварианта – модуля относительной скорости, – зависит также от угловой скорости поворота, то есть от одной из компонент Q-связности, разной для разных реперов; в силу этого соотношения нормальных ускорений в базах Σ и Σ′ оказываются различными.

Тем не менее, две пары этих соотношений весьма симметричны; так, если в формулах (5.5-24), (5.5-25) скорость (и гиперболический параметр) взять с противоположным знаком и перенести штрихи с тех величин, где они есть на те, где их нет, то получится в точности пара соотношений (5.5-36), (5.5-37). Можно провести и обратную операцию.

Уравнения релятивистской задачи двух тел

Однако есть возможность записи этих соотношений и во вполне симметричном виде. И, хотя при этом придется воспользоваться некоторыми эмпирическими соображениями, на которые наводит замеченная асимметрия каждой пары уравнений, представляется целесообразным вариант такой записи здесь привести.

Пусть в качестве исходных взяты уравнения, записанные в базе Σ; можно выразить компоненты ускорений реперов через соответствующие компоненты сил. Для уравнения (5.5-24) с касательными ускорениями такие выражения имеют вид

$$\underset{t}{a_{2'}} = \frac{1}{m}\underset{t}{F'_2}, \qquad \underset{t}{a_2} = \frac{1}{M_0}\underset{t}{F_2}; \tag{5.5-38}$$

здесь $\underset{t}{F_{2'}}$ – компонента «касательной» силы, действующей на тело отсчета репера Σ′ с точки зрения базы,[77] $\underset{t}{F_2}$ – компонента силы, действующей на тело отсчета самой базы. Учтено также, что «продольная» масса наблюдаемого тела (ускоренного вдоль направления скорости) отлична от массы покоя, тогда как масса тела отсчета самой базы, конечно, является массой покоя.

Нормальные же ускорения уравнения (5.5-25) могут быть выражены через компоненты сил следующим образом

$$\underset{t}{a_{3'}} = \frac{1}{m_0}\underset{t}{F'_3}, \qquad \underset{t}{a_3} = \frac{1}{M_0}\underset{t}{F_3}, \tag{5.5-39}$$

где в отличие от случая «касательных» ускорений предполагается, что в ортогональном относительной скорости направлении «поперечная» масса наблюдаемого тела может считаться массой покоя.

После подстановки выражений (5.5-38) и (5.5-39) исходная пара соотношений принимает вид системы уравнений ньютоновской динамики

$$c\,\underset{t}{\dot{\eta}} = \frac{1}{m}\underset{t}{F'_2} - \frac{1}{M_0}\underset{t}{F_2}, \tag{5.5-40}$$

[77] См. для сравнения формулу (5.5-19).

$$v\underset{t}{\omega}=\frac{1}{m}\underset{t}{F_3'}-\frac{1}{M_0}\underset{t}{F_3}\,, \tag{5.5-41}$$

с той лишь разницей, что кинематическое касательное ускорение есть производная по времени наблюдателя не от относительной скорости реперов, а от ее гиперболического параметра.[78]

Уравнения (5.5-40), (5.5-41) чрезвычайно просты; их вид позволяет сразу же записать систему уравнений для той же механической системы, но наблюдаемой из базы Σ'

$$-c\underset{t'}{\dot{\eta}}=\frac{1}{M}\underset{t'}{F_2}-\frac{1}{m_0}\underset{t'}{F_{2'}}\,, \tag{5.5-42}$$

$$-v\underset{t'}{\omega'}=\frac{1}{M}\underset{t'}{F_3}-\frac{1}{m_0}\underset{t'}{F_{3'}}\,, \tag{5.5-43}$$

которые (хотя и в штрихованном времени), конечно, также выводятся из соотношений (5.5-36), (5.5-37).

Если тела отсчета двух рассматриваемых реперов взаимодействуют только между собой, то пары уравнений (5.5-40), (5.5-41) или (5.5-42), (5.5-43) можно считать динамическими уравнениями релятивистской задачи двух тел. Пусть при этом в каждой базе верен третий закон Ньютона, например, в базе Σ

$$\underset{t}{F_2'}=-\underset{t}{F_2}\,, \qquad \underset{t}{F_3'}=-\underset{t}{F_3}\,;$$

тогда уравнения (5.5-40) и (5.5-41) переписываются в еще более простом – и знакомом – виде

$$c\underset{t}{\dot{\eta}}=\frac{1}{\mu}\underset{t}{F_2'}\,, \qquad v\underset{t}{\omega}=\frac{1}{\mu}\underset{t}{F_3'}\,, \tag{5.5-44}$$

где введено обозначение «приведенной массы с точки зрения базы Σ»

$$\mu\equiv\frac{mM_0}{m+M_0}\,.$$

В аналогичной форме можно представить динамические уравнения в базе Σ'. Если

$$\underset{t'}{F_2}=-\underset{t'}{F_{2'}}\,, \qquad \underset{t'}{F_3}=-\underset{t'}{F_{3'}}\,,$$

то уравнения (5.5-32), (5.5-33) записываются как

$$-c\underset{t'}{\dot{\eta}}=\frac{1}{\mu'}\underset{t''}{F_2}\,, \qquad -v\underset{t'}{\omega'}=\frac{1}{\mu'}\underset{t'}{F_3}\,, \tag{5.5-45}$$

где

$$\mu'\equiv\frac{m_0M}{m_0+M}$$

– приведенная масса «с точки зрения базы Σ'.

[78] Несложно заметить, что уравнения (5.5-40) и (5.5-41) так же сразу следуют из системы уравнений (5.5-20) при учете того факта, что ускорение базы определяется как частное от действующей на нее силы и собственной массы (покоя).

Таким образом, задача двух тел в данной релятивистской версии, как и в классической механике, может быть сведена к задаче динамики одного тела с приведенной массой, движущегося под действием заданной силы. Следует только подчеркнуть три существенных отличия от случая ньютоновской механики:

- тангенциальное ускорение есть производная по времени от гиперболического параметра,
- приведенная масса есть величина переменная, зависящая от модуля относительной скорости реперов,
- в разных базах уравнения имеют различный вид в силу наличия соотношения времен и масс; но уравнений (5.5-44) достаточно для описания динамики, поскольку знание одной пары уравнений, заданных в одной базе и в одном времени, обеспечивает возможность их записи в другой базе и в другом времени.

Легко показать, что в нерелятивистском пределе две системы уравнений (5.5-44) и (5.5-45) эквивалентны друг другу и векторному уравнению классической задачи двух тел.

5.6. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

В силу представления уравнений (5.5-40), (5.5-41) в виде (5.5-44), для упрощения, но, в известном смысле, не теряя общности рассуждений, можно рассматривать динамику движения лишь одного тела (например, тела отсчета репера Σ'), считая массу тела отсчета наблюдателя достаточно большой $M_0 >> m_0$. При этом компоненты динамического уравнения имеют вид

$$c\dot{\eta} = \frac{1}{m}F_2', \qquad v\omega = \frac{1}{m}F_3'; \tag{5.6-1}$$

указатель времени опущен, так как подразумевается, что все измерения осуществляются теперь во времени t базы Σ. Стоит также напомнить, что база $\Sigma \equiv \{\mathbf{q}_k\}$ не является инерциальной: по отношению к истинно инерциальному реперу $\tilde{\Sigma} \equiv \{\mathbf{q}_{\tilde{k}}\}$ (все векторы которого постоянны) она осуществляет ряд вращений так, что вектор $\mathbf{q}_2$ всегда следит за направлением скорости наблюдаемого тела. Круг рассматриваемых ниже задач будет ограничен случаями «плоского движения», при котором база Σ получается из репера $\tilde{\Sigma}$ простым действительным вращением вокруг вектора $\mathbf{q}_{\tilde{1}} = \mathbf{q}_1$ на зависящий от времени угол

$$\Sigma = R_1^{\alpha(t)}\tilde{\Sigma}.$$

Поскольку в уравнениях (5.6-1) главной переменной является гиперболический параметр (и модуль относительной скорости), удобно начать не со стандартных задач механики, а с задачи, где в определение компонент силы также входит скорость частицы. В качестве таковой может выступать «магнитная часть» силы Лоренца.

Движение заряженной частицы в постоянном магнитном поле

Пусть частица, имеющая массу покоя m_0 и электрический заряд e, движется в постоянном магнитном поле B, направленном вдоль вектора $\mathbf{q}_1$ базы Σ; в этом случае на частицу действует сила

$$\vec{F} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}.$$

Можно предположить, что именно эта сила определяет динамику частицы в уравнениях (5.6-1): $\vec{F} = \vec{F}'$. Поскольку, в свою очередь, вектор скорости параллелен $\mathbf{q}_2$, компоненты силы легко вычисляются, и из уравнений (5.6-1), приобретающих простой вид

$$c\dot{\eta}=0\,,\qquad v\,\omega=-\frac{e}{mc}vB\,,$$

сразу следует постоянство скорости (компоненты и модуля)

$$v_2=v=c\tanh\eta=const \tag{5.6-2}$$

и циклической частоты поворота репера

$$\omega=-\frac{e}{m_0\cosh\eta\, c}B=const\,; \tag{5.6-2}$$

знак минус характеризует вращение репера вокруг направления $\mathbf{q}_1$ по часовой стрелке. Таким образом, наблюдаемая частица движется с некоторой постоянной по величине скоростью по круговой траектории в плоскости, перпендикулярной направлению напряженности магнитного поля. При этом также оказывается, что репер $\Sigma\equiv\{\mathbf{q}_k\}$, вектор $\mathbf{q}_2$ которого параллелен направлению скорости, является также и следящим репером: его вектор $\mathbf{q}_3$ всегда направлен на наблюдаемую частицу (рис. 5.-16).[79] Последнее обстоятельство позволяет быстро найти решение этой задачи с позиций репера Σ′. Согласно формуле (5.5-39), Σ′-наблюдатель испытывает ускорение (измеренное в его собственном времени)

$$\underset{t'}{a_{3'}}=\frac{1}{m_0\cosh\eta}\underset{t}{F_3'}\,,$$

то есть он может измерить единственную компоненту силы

$$\underset{t'}{F_{3'}}=m_0\,\underset{t'}{a_{3'}}=\frac{e}{c\,\cosh\eta}v\,B\,.$$

Соотношение времен (для каждой базы: Σ или Σ′) и наблюдаемые (в том числе, кажущиеся) кинематические величины – координата, скорость и ускорение – каждого из реперов как функции времени наблюдателя определены в решении релятивистской задачи кинематики кругового движения (глава 3, параграф 5.3).

Движение частицы в поле центральной силы

По-прежнему тело отсчета базы Σ считается неподвижным, а наблюдается частица с массой m_0 (тело отсчета репера Σ′). Изменение BQ-импульса частицы в такой базе Σ следует из формулы (5.5-18) [80]

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=m\,(v\,\dot{\eta}\;i\mathbf{q}_1+c\,\dot{\eta}\;\mathbf{q}_2+v\,\omega\,\mathbf{q}_3)=F_1'\,i\mathbf{q}_1+F_2'\mathbf{q}_2+F_3'\mathbf{q}_3\,. \tag{5.6-3}$$

Эту задачу, однако, как и аналогичную классическую, удобно решать в следящем базисе,[81] один из векторов которого все время направлен на частицу.

Пусть вдоль линии действия центральной силы направлен, например, вектор $\mathbf{q}_{\bar{2}}$ следящего базиса $\overline{\Sigma}=\{\mathbf{q}_{\bar{k}}\}$, и при этом векторы ускорения и скорости частицы лежат в плоскости

---

[79] Решение (5.5-37), (5.5-38) с точностью до констант интегрирования совпадает с решением аналогичной задачи, приведенном в книге [65] стр. 76-77, хотя динамические уравнения (5.5-36) и им аналогичные в цитируемом источнике не идентичны.

[80] Штрих у компонент силы есть реминисценция принадлежности наблюдаемой частицы штрихованному реперу, точка зрения наблюдателя которого сейчас не рассматривается; но чтобы не перегружать текст новыми символами, штрих оставлен у этой величины.

[81] См. главу 4, параграф 4.2.

($\mathbf{q}_{\bar{2}}, \mathbf{q}_{\bar{3}}$); тогда репер, $\mathbf{q}_k$, следящий за направлением вектора скорости, и следящий базис $\mathbf{q}_{\bar{k}}$ связаны друг с другом очевидным соотношением

$$\Sigma = R_1^{\gamma(t)}\, \overline{\Sigma}\,, \tag{5.6-4}$$

где $\gamma(t)$ – угол между направлениями радиуса-вектора частицы и ее скорости, или, что то же самое, угол между векторами $\mathbf{q}_{\bar{2}}$ и $\mathbf{q}_2$ (рис.5-17). Компоненты скорости частицы в следящем базисе имеют вид

$$v_{\bar{2}} = \dot{r}\,, \qquad\qquad v_{\bar{3}} = r\,\dot{\beta}\,, \tag{5.6-5}$$

где r – единственная наблюдаемая в следящем базисе $\overline{\Sigma}$ радиальная координата частицы (модуль ее радиуса-вектора), $\dot{\beta}(t)$ – циклическая частота, с которой базис $\overline{\Sigma}$ вращается вокруг постоянного направления $\mathbf{q}_1$. Принятые обозначения вполне соответствуют тем, что приняты в формулировке аналогической ньютоновской задачи в главе 4. Угол $\gamma(t)$ связан с компонентами скорости (5.6-5) стандартными соотношениями

$$\frac{v_{\bar{2}}}{v} = \cos\gamma\,, \qquad \frac{v_{\bar{3}}}{v} = \sin\gamma\,, \tag{5.6-6}$$

то есть, согласно уравнению поворота (5.6-4), векторы репера Σ преобразуются в векторы следящего базиса $\overline{\Sigma}$ следующим образом

$$\mathbf{q}_2 = \frac{v_{\bar{2}}}{v}\mathbf{q}_{\bar{2}} + \frac{v_{\bar{3}}}{v}\mathbf{q}_{\bar{3}}\,, \qquad \mathbf{q}\;\; = -\frac{v_{\bar{3}}}{v}\mathbf{q}_{\bar{2}} + \frac{v_{\bar{2}}}{v}\mathbf{q}_{\bar{3}}\,; \tag{5.6-7}$$

вектор временного направления при этом всегда остается неизменным

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{\bar{1}} = \mathbf{q}_{\tilde{1}}\,,$$

так что его индекс резонно писать максимально просто.

Переход к следящему базису в уравнении (5.5-39) приводит к выражению

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m[v\dot{\eta}\,i\mathbf{q}_1 + (c\,\dot{\eta}\frac{v_{\bar{2}}}{v} - \omega\, v_{\bar{3}})\,\mathbf{q}_{\bar{2}} + (c\dot{\eta}\frac{v_{\bar{3}}}{v} + \omega\, v_{\bar{2}})\,\mathbf{q}_{\bar{3}}] = F_1'\,i\mathbf{q}_1 + F_{\bar{2}}'\mathbf{q}_{\bar{2}} + F_{\bar{3}}'\mathbf{q}_{\bar{3}}\,. \tag{5.6-8}$$

Здесь величину ω – угловую скорость поворота репера Σ, вектор которого $\mathbf{q}_2$ следит за направлением скорости частицы, нужно выразить в терминах следящего базиса, а именно – через угловую скорость $\overline{\omega} \equiv \dot{\beta}$ вращения следящего базиса. Это соотношение можно найти по формуле типа (5.5-28) для преобразования Q-связностей, имея в виду преобразование репера (5.6-4). Но поскольку движение частицы происходит в плоскости, связь между рассматриваемыми угловыми скоростями очевидна

$$\omega = \overline{\omega} + \dot{\gamma}\,,$$

или, принимая во внимание выражения (5.6-6),

$$\omega = \overline{\omega} + \frac{v_{\bar{2}}}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{\bar{3}}}{v}\right) - \frac{v_{\bar{3}}}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{\bar{2}}}{v}\right); \tag{5.6-9}$$

понадобится также тождественное соотношение

$$\frac{v_{\bar{2}}}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{\bar{2}}}{v}\right) = -\frac{v_{\bar{3}}}{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_{\bar{3}}}{v}\right). \tag{5.6-10}$$

С учетом формул (5.6-9) и (5.6-10) коэффициент при $\mathbf{q}_{\bar{2}}$ в левой части уравнения (5.6-8) записывается в виде

$$c\dot{\eta}\frac{v_{\bar{2}}}{v} - \omega v_{\bar{3}} = c\dot{\eta}\frac{v_{\bar{2}}}{v} - \overline{\omega}\, v_{\bar{3}} + \dot{v}_{\bar{2}} - v_{\bar{2}}\frac{\dot{v}}{v} = c\dot{\eta}\frac{v_{\bar{2}}}{v} + \dot{v}_{\bar{2}} - \overline{\omega}\, v_{\bar{3}},$$

поскольку $\dot{v} = c\dot{\eta}\dfrac{1}{\cosh^2\eta}$

и $c\dot{\eta}\dfrac{v_{\bar{2}}}{v} - v_{\bar{2}}\dfrac{\dot{v}}{v} = c\dot{\eta}\dfrac{v_{\bar{2}}}{v}\tanh^2\eta = \dfrac{v}{c}\dot{\eta}\, v_{\bar{2}}$.

Таким образом, радиальная компонента (при $\mathbf{q}_{\bar{2}}$) динамического уравнения(5.6-8) есть

$$m_0 \cosh\eta\,(\frac{v}{c}\dot{\eta}\, v_{\bar{2}} + \dot{v}_{\bar{2}} - \overline{\omega}\, v_{\bar{3}}) = F'_{\bar{2}}, \qquad (5.6\text{-}11)$$

аналогично определяется и «угловая» компонента (при $\mathbf{q}_{\bar{3}}$)

$$m_0 \cosh\eta\,(\frac{v}{c}\dot{\eta}\, v_{\bar{3}} + \dot{v}_{\bar{3}} + \overline{\omega}\, v_{\bar{2}}) = F'_{\bar{3}}. \qquad (5.6\text{-}12)$$

Здесь нужно заметить, что в дальнейшем $F'_{\bar{3}}$ будет полагаться равной нулю, как это и должно быть для центральной силы. Понятно (и легко проверить), что динамические уравнения (5.6-11) и (5.6-12) получаются также, если записать BQ-импульс частицы сразу в следящем репере

$$\overline{\mathbf{P}} = m_0 \cosh\eta\,(ic\,\mathbf{q}_1 + v_{\bar{2}}\mathbf{q}_{\bar{2}} + v_{\bar{3}}\mathbf{q}_{\bar{3}})$$

и рассматривать его изменение во времени базы.

Выше показано, что «временная» компонента системы динамических уравнений в базе Σ, следует из компоненты «вдоль направления скорости», если считать, что

$$F'_1 = \frac{v}{c}F'_{\bar{2}}, \qquad (5.6\text{-}13)$$

то есть из трех уравнений независимыми оказываются лишь два. Поскольку реперы Σ и $\overline{\Sigma}$ связаны линейным преобразованием (5.6-4), или (5.6-7), свойство независимости всего двух уравнений из трех с очевидностью остается неизменным и для выражения в новом репере. Впрочем, это несложно продемонстрировать непосредственно. Из уравнения (5.6-8) следует «временная» динамическая компонента (при $i\mathbf{q}_1$)

$$m v\dot{\eta} = F'_1\ . \qquad (5.6\text{-}14)$$

Если преобразовать пространственные компоненты: уравнение (5.6-11) умножить на $v_{\bar{2}}/v$, а уравнение (5.6-12) – на $v_{\bar{3}}/v$ и результаты сложить, то получается

$$m(\frac{v}{c}\dot{\eta} + \dot{v}) = \frac{v_{\bar{2}}}{v}F'_{\bar{2}} + \frac{v_{\bar{3}}}{v}F'_{\bar{3}}.$$

После преобразования левой части и с учетом того, что правая часть в точности есть F'_2, это уравнение сводится к виду

$$m c\dot{\eta} = F'_{\bar{2}},$$

откуда, после сравнения с (5.6-14), следует уже известное соотношение (5.6-13). Иными словами, из трех компонент уравнения (5.6-8) достаточно найти решение лишь пространственных компонент, временная компонента тогда удовлетворится «автоматически».

Первые интегралы динамических уравнений.

После подстановки компонент скорости частицы (5.6-5), угловой скорости вращения репера $\overline{\varpi} \equiv \dot{\beta}$ и с учетом свойства центральности силы уравнения (5.6-11), (5.6-12) принимают вид

$$m_0 \cosh\eta\,(\frac{v}{c}\dot{\eta}\,\dot{r} + \ddot{r} - \dot{r}\dot{\beta}^2) = F\ ,$$

$$m_0 \cosh\eta\,(\frac{v}{c}\dot{\eta}\,r\dot{\beta} + r\ddot{\beta} + 2\dot{r}\dot{\beta}) = 0\ .$$

где для упрощения сделано обозначение $F \equiv F_2'$. Если дополнительно ввести обозначение для «удельной силы»

$$f[r(t)] \equiv \frac{F}{m_0}$$

и сократить второе уравнение на $m_0 \cosh\eta \neq 0$, то полученная система уравнений

$$\cosh\eta\,(\frac{v}{c}\dot{\eta}\,\dot{r} + \ddot{r} - \dot{r}\dot{\beta}^2) = f\,[r(t)], \tag{5.6-15}$$

$$\frac{v}{c}\dot{\eta}\,r\dot{\beta} + r\ddot{\beta} + 2\dot{r}\dot{\beta} = 0\ . \tag{5.6-16}$$

представляется в виде, обобщающем соответствующие уравнения классической механики (4-24). Видно, что релятивистская система уравнений имеет более сложную структуру, и, кроме того, не исключено, что потребуются некие предположения относительно характера силы.

Анализ решения системы, как и в классическом случае, целесообразно начать с уравнения (5.6-16). Если сделать замену переменных и ввести новую функцию, имеющую размерность и смысл секторной скорости частицы

$$\sigma \equiv r^2\dot{\beta}\ , \tag{5.6-17}$$

то после подстановки и применения соотношения

$$v/c = \tanh\eta\,, \tag{5.6-18}$$

уравнение (5.6-16) приводится к виду

$$\dot{\eta}\tanh\eta + \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = 0\,,$$

очевидно допускающему точный первый интеграл

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{\cosh\eta}, \qquad \sigma_0 = const\,. \tag{5.6-19}$$

Таким образом, вычисленная по наблюдениям из базы $\overline{\Sigma}$ (или Σ) секторная скорость частицы не является постоянной величиной; но таковой оказывается секторная скорость, вычисленная во времени самой частицы (как тела отсчета репера Σ'). Действительно,

$$\sigma \equiv r^2\frac{d}{dt}\beta = r^2\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\beta = \frac{r^2\underset{t'}{\dot{\beta}}}{\cosh\eta}\ ;$$

сравнение последнего соотношения с формулой (5.6-17) дает

$$r^2\underset{t'}{\dot{\beta}} = \sigma_0 = const\ . \tag{5.6-20}$$

Этот неожиданно точный результат представляется, тем не менее, вполне физически состоятельным.

Теперь можно обратиться к решению уравнения (5.6-15); подстановка сюда соотношений (5.6-17), (5.6-18) приводит его к виду

$$\dot{\eta}\sinh\eta\,\dot{r} + \cosh\eta\,\ddot{r} - \frac{\sigma_0^2}{r^3\cosh\eta} = f\,[r(t)]\,.$$

Первые два слагаемых левой части есть полная производная

$$\dot{\eta}\sinh\eta\,\dot{r} + \cosh\eta\,\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\cosh\eta)\,.$$

Имея это в виду, можно умножить на $m_0\,\dot{r}\,\cosh\eta$ (возвращаясь тем самым к силе F) обе части последнего уравнения; тогда оказывается возможным записать в виде полной производной по времени всю его левую часть

$$m_0\,\dot{r}\cosh\eta\frac{d}{dt}(\dot{r}\cosh\eta) - \frac{m_0\,\sigma_0^2\,\dot{r}}{r^3} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m_0(\dot{r}\cosh\eta)^2}{2} + \frac{m_0\,\sigma_0{}^2}{2\,r^2}\right] = F\,(r)\,\dot{r}\cosh\eta\,. \qquad (5.6\text{-}21)$$

Если, как в классической механике, просто считать силу потенциальной

$$F = -\frac{d\,U(r)}{dr}\,, \qquad (5.6\text{-}22)$$

то правая часть (5.6-21), вообще говоря, полной производной по времени не является, этому «мешает» множитель $\cosh\eta(t)$. Впрочем, это обстоятельство не вызывает удивления: проблемы определения потенциальных сил в релятивистской механике известны. Поэтому предлагается искусственно добиться того, чтобы правая часть уравнения (5.6-21) была бы полной производной по времени. Для этого вместо стандартного определения (5.6-22) предлагается следующее соотношение

$$F = -\frac{d\,U}{dr} - X\,, \qquad (5.6\text{-}23)$$

где X – некоторая функция, свойства которой должны определиться из вышеизложенного требования

$$\left(\frac{d\,U}{dr} + X\right)\dot{r}\cosh\eta = \frac{dW(t)}{dt}\,; \qquad (5.6\text{-}24)$$

здесь $W(t)$ есть функция, обобщающая на исследуемый случай понятие потенциальной энергии. Последнее уравнение, по сути, является алгебраическим: после раскрытия скобок его левая часть имеет вид

$$\frac{dU}{dt}\cosh\eta + X\frac{dr}{dt}\cosh\eta\,,$$

и, чтобы условие (5.6-24) удовлетворялось, достаточно потребовать равенства

$$X\frac{dr}{dt}\cosh\eta = U\frac{d}{dt}\cosh\eta\,,$$

из которого следует выражение для функции X

$$X = U\frac{1}{\cosh\eta}\frac{d\cosh\eta}{dr} = U\frac{d\ln(\cosh\eta)}{dr}\,, \qquad (5.6\text{-}25)$$

после чего из (5.6-24) определяется функция W

$$W = U\cosh\eta + const\ . \tag{5.6-26}$$

Теперь, подставляя соотношения (5.6-23), (5.6-25) в уравнение (5.6-21) и перенося все его члены в левую часть можно записать второй закон сохранения, аналогичный классическому закону сохранения механической энергии в задаче двух тел

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0(\dot{r}\cosh\eta)^2}{2} + \frac{m_0\,\sigma_0{}^2}{2\,r^2} + U\cosh\eta\right] = 0\ .$$

Если вернуться к наблюдаемым из базы Σ величинам $m = m_0\cosh\eta$ и $\sigma = \sigma_0 / \cosh\eta$, то нетрудно убедиться в том, что последнее уравнение допускает следующую запись

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{m\,\dot{r}^2}{2} + \frac{m\,\sigma^2}{2\,r^2} + U\right)\cosh\eta\right] = 0\,,$$

где в квадратных скобках стоит сумма кинетической и потенциальной энергии частицы

$$E \equiv \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + \frac{m\,\sigma^2}{2\,r^2} + U\ \ , \tag{5.6-27}$$

так что первый интеграл уравнения (5.6-15) выглядит следующим образом

$$E\cosh\eta = E_0 = const\,. \tag{5.6-28}$$

Как и секторную скорость, можно вычислить механическую энергию (5.6-27) в репере частицы, где собственная масса и секторная скорость постоянны

$$E \equiv \frac{m_0\cosh\eta}{2}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2\left(\frac{dr}{dt'}\right)^2 + \frac{m_0\ \sigma_0^2}{2\,r^2\cosh\eta} + U\ \ ,$$

откуда после домножения на $\cosh\eta$ следует

$$E_0 = \frac{m_0\ \dot{r}_{t'}^2}{2} + \frac{m_0\ \sigma_0^2}{2\,r^2} + U\cosh\eta = const\ \ .$$

В этом выражении радиальная координата по-прежнему остается измеренной в базе $\overline{\Sigma}$, поэтому оно имеет следующий смысл: механическая энергия частицы, вычисленная в ее собственном времени $\overline{\Sigma}$-наблюдателем, есть величина постоянная; величину $U\cosh\eta$ при этом можно считать потенциальной энергией частицы, вычисленной в репере Σ' (но опять же с точки зрения базы $\overline{\Sigma}$).

<u>Вторые интегралы динамических уравнений.</u> Дальнейшее интегрирование уравнений (5.6-19) и (5.6-28) зависит от того, в каком виде задается функция потенциальной энергии. Если, например, в релятивистское выражение для потенциала силы масса движущейся частицы входит линейно (как в потенциал силы тяготения), то можно предположить, что эта функция имеет вид

$$U = \widetilde{U}(r)\cosh\eta\ , \tag{5.6-29}$$

где $\widetilde{U}(r)$ – потенциальная энергия классической механики; при этом решение можно довести до интеграла траектории. Действительно, при условии (5.6-29) уравнение (5.6-28) с учетом определения (5.6-27) принимает вид

$$\left[\frac{m_0\,\dot{r}^2}{2}+\frac{m_0\,\sigma_0^2}{2\,r^2}+\widetilde{U}(r)\right]\cosh^2\eta=E_0\,. \qquad (5.6\text{-}30)$$

Первые два слагаемых в левой части составляют кинетическую энергию частицы, квадрат модуля скорости есть

$$\dot{r}^2+\frac{\sigma_0^2}{r^2}=\dot{r}^2+r^2\dot{\beta}^2=v^2\,. \qquad (5.6\text{-}31)$$

Учет соотношения (5.6-31) и умножение уравнения (5.6-30) на

$$\cosh^{-2}\eta=1-\frac{v^2}{c^2}$$

с последующим простым преобразованием дает

$$m_0\left(1+\frac{E_0}{2m_0c^2}\right)\frac{v^2}{2}=E_0-\widetilde{U}\,. \qquad (5.6\text{-}32)$$

Круглая скобка – множитель массы покоя частицы – величина постоянная; можно сделать обозначение

$$\widetilde{m}\equiv m_0\left(1+\frac{E_0}{2m_0c^2}\right)\,, \qquad (5.6\text{-}33)$$

тогда из (5.6-31) получается выражение для квадрата скорости частицы

$$v^2=\frac{2}{\widetilde{m}}(E_0-\widetilde{U})\,. \qquad (5.6\text{-}34)$$

Теперь, используя (5.6-31), снова можно перейти к полярным координатам и сразу записать интегральную зависимость модуля радиуса-вектора частицы от времени

$$t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\widetilde{m}}\left[E_0-\widetilde{U}(r)\right]-\frac{\sigma_0^2}{r^2}}}\,. \qquad (5.6\text{-}35)$$

Как видно, в рассматриваемом простом случае потенциала (5.6-29), формула (5.6-35) отличается от своего классического аналога (4-31) лишь величиной массы (5.6-33).

Интеграл траектории получается выражением из (5.6-17), (5.6-19) производной угла поворота следящего репера

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\sigma_0}{r^2\cosh\eta}=\frac{\sigma_0}{r^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Но из уравнения (5.6-34) можно выразить

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{2}{\widetilde{m}c^2}\left[E_0-\widetilde{U}(r)\right],$$

что после подстановки в предыдущее уравнение позволяет записать дифференциал угловой координаты

$$d\beta=dt\,\frac{\sigma_0}{r^2}\sqrt{1-\frac{2}{\widetilde{m}c^2}\left[E_0-\widetilde{U}(r)\right]}\,.$$

Заменяя здесь dt из соотношения (5.6-35), нетрудно получить интеграл траектории частицы

$$\beta(r) = \sigma_0 \int \frac{dr}{r^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{\widetilde{m}c^2}\left[E_0 - \widetilde{U}(r)\right]}{\frac{2}{\widetilde{m}}\left[E_0 - \widetilde{U}(r)\right] - \frac{\sigma_0^2}{r^2}}}\,, \tag{5.6-36}$$

вычитаемое из единицы в числителе под радикалом отличает его от соответствующего классического интеграла.

Итак, делая некоторые (впрочем, естественные) допущения о потенциальной энергии частицы в поле центральной силы массивного тела отсчета базы, можно довести эту задачу до вторых интегралов движения. Это позволяет, в частности, достаточно подробно рассмотреть в данной версии динамики задачу Кеплера.

Согласно условию (5.6-29) потенциал в данном случае есть $\widetilde{U}(r) = -\alpha / r$, $\alpha = G m_0 M_0$, G – ньютоновская гравитационная постоянная. Делая замену переменной $x = 1/r$, несложно привести интеграл (5.6-36) к виду

$$\beta = -\sigma_0 \int dx \sqrt{\frac{1 - \lambda(1 + kx)}{ax^2 + bx + c}}\,, \tag{5.6-36}$$

где приняты следующие обозначения

$$\lambda \equiv \frac{E_0}{\widetilde{m}\,c^2}\,, \quad k \equiv -\frac{\alpha}{E_0}\,, \quad a \equiv -\sigma_0^2\,, \quad b \equiv \frac{2\alpha}{\widetilde{m}}\,, \quad c \equiv \frac{2E_0}{\widetilde{m}}\,. \tag{5.6-37}$$

Полагая далее отношение $E_0 / \widetilde{m}c^2$ малым ($\lambda << 1$), числитель подынтегральной функции (5.6-36) можно представить в виде первых членов разложения

$$\sqrt{1 - 2\lambda(1 + kx)} \approx 1 - \lambda(1 + kx)\,,$$

что разбивает интеграл (5.6-36) на два слагаемых

$$\beta = -\sigma_0 \left[(1 - \lambda) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \lambda k \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \right].$$

Второй интеграл после интегрирования по частям выражается через первый

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,,$$

откуда после простой алгебры следует

$$\left[1 - \lambda\left(1 - \frac{kb}{2a}\right)\right] \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{\beta}{\sigma_0} + \lambda \frac{k}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\,.$$

Поскольку удовлетворяются условия

$$a < 0\,, \qquad b^2 > 4ac\,, \qquad \sqrt{b^2 - 4ac} > |2ax + b|\,,$$

интегрирование приводит к арккосинусу

$$\arccos\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}=\frac{\beta-\lambda\frac{k\sigma_0}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}}{1-\lambda\left(1-\frac{kb}{2a}\right)},$$

(постоянная фаза принимается равной нулю) или, с учетом малости параметра λ,

$$\arccos\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}=\beta\left[1+\lambda\left(1-\frac{kb}{2a}\right)\right]-\lambda\frac{k\sigma_0}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\,. \tag{5.6-38}$$

От классического этот интеграл отличается малыми добавками – коэффициентом при полярном угле

$$1+\lambda\left(1-\frac{kb}{2a}\right)\equiv A$$

и последним слагаемым

$$\frac{k\sigma_0}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\equiv B\,. \tag{5.6-39}$$

Сделав последние обозначения, уравнение траектории (5.6-38) легко переписать в канонической форме

$$x=-\frac{b}{2a}\left[1+\varepsilon\cos(A\beta+\lambda B)\right], \tag{5.6-40}$$

где эксцентриситет есть

$$\varepsilon\equiv\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\,. \tag{5.6-41}$$

Как и в классике, здесь форма орбиты зависит от значения механической энергии; в дальнейшем будет рассматриваться орбита, близкая к эллиптической, для нее $\varepsilon<1$, и этому условию соответствует отрицательное значение механической энергии $E_0<0$.

Классическим эллипсом орбита становится при условии $\lambda=0$

$$x_{\lambda=0}=-\frac{b}{2a}\left(1+\varepsilon\cos\beta\right). \tag{5.6-42}$$

Поскольку слагаемое λB уже имеет первый порядок малости, достаточно в *B(x)* учесть соотношение (5.6-42), тогда формула (5.6-39) существенно упрощается

$$B(x_{\lambda=0})=\frac{kb\varepsilon}{2a}\sin\beta\,,$$

и аргумент косинуса в уравнении (5.6-40) принимает вид

$$\varphi\equiv A\beta-\lambda\frac{kb\varepsilon}{2a}\sin\beta\,. \tag{5.6-43}$$

Периодом функции (5.6-40) $x(\varphi)\equiv\frac{1}{r(\cos\varphi)}$ аргумента φ является угол 2π. Изменение φ на этот угол приведет к иному изменению угла β, на который реально поворачивается вектор следящего репера, что означает также смещение «перигелия» эллипсоподобной орбиты вокруг центра притяжения. Пусть при изменении φ на 2π угол β предположительно увеличится на $2\pi+\delta$, где δ – малая величина. Тогда из соотношения (5.6-43) следует

$$\Delta\varphi = 2\pi = A\,(2\pi+\delta) - \lambda\frac{kb\varepsilon}{2a}[\sin(\beta+2\pi+\delta)-\sin\beta];$$

но в силу условия $\delta \ll 1$ разность в квадратных скобках есть $\delta\cos\beta$, то есть

$$2\pi = A\,(2\pi+\delta) - \lambda\frac{kb\varepsilon}{2a}\delta\cos\beta\,,$$

откуда следует выражение для δ

$$\delta = 2\pi\frac{1-A}{A-\lambda\dfrac{kb\varepsilon}{2a}\cos\beta} = 2\pi\frac{1-1+\lambda\left(1-\dfrac{kb}{2a}\right)}{1+\lambda\left(1-\dfrac{kb}{2a}-\dfrac{kb\varepsilon}{2a}\cos\beta\right)},$$

или, учитывая только первый порядок малости по λ,

$$\delta = 2\pi\lambda\left(1-\frac{kb}{2a}\right).$$

Теперь, имея в виду обозначения (5.6-37) и выражая все входящие в последнюю формулу величины через эксцентриситет (5.6-41) и большую полуось орбиты

$$l \equiv \frac{1}{2}(r_{\max}+r_{\min}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{\max}}+\frac{1}{x_{\min}}\right) = \frac{2\sigma_0^2}{b(1-\varepsilon^2)}\,,$$

несложно выразить смещение «перигелия» стандартным образом

$$\delta \cong -\frac{\pi G M_0}{l c^2\,(1-\varepsilon^2)}. \tag{5.6-44}$$

Это формула описывает число релятивистское смещения перигелия орбиты планеты (конечно, в рамках сделанных в процессе вывода предположений). Сравнивая формулу (5.6-44) с известным выражением для гравитационного смещения перигелия планеты, вычисленным в рамках общей теории относительности, можно видеть, что релятивистское смещение ретроградно, то есть перигелий смещается в сторону, противоположную вращению, а величина этого смещения в шесть раз меньше гравитационного.

Заключая этот раздел, полезно выделить основные черты принятой здесь версии релятивистских динамических уравнений.

Первое. Рассматривается изменение не пространственного (как в классической механике), а инвариантного BQ-импульса частицы, которое в ее собственном репере эквивалентно компонентам действующей на нее силы, а в репере наблюдателя (в базе) приводит к системе уравнений, «временная» компонента которых с точностью до скалярного множителя оказывается тождественной компоненте «вдоль направления скорости».

Второе. Изменение пространственных компонент BQ-импульса частицы «автоматически» сводится к учету зависимости массы наблюдаемой частицы от скорости ее движения относительно базы (то же наблюдается в иных аналогичных подходах к записи уравнений релятивистской динамики, например в [65], [82]).