ГЛАВА 6
ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ КВАТЕРНИОННЫХ СТРУКТУР

В главах 4 и 5 рассматривались Q-пространства, кватернионная специфика которых существенным образом отражала свойства Q-реперов, используемых наблюдателями в качестве систем отсчета. Однако, как уже отмечалось выше, кватернионный характер пространства может быть никак не связан со спецификой описания системы отсчета, а являться его врожденным внутренним свойством. В данной главе приводятся характерные примеры таких гипотетических Q-пространств и рассматривается ряд возможных физических проявлений их скрытой кватернионной структуры. При этом для каждого из таких пространств будет определено его место в системе классификации.

6.1. Q-ПРОСТРАНСТВО И УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ

Яркий пример физического проявления кватернионной структуры (замеченный автором в числе первых [115]) связан с Q-пространством простейшего вида – евклидовым Q-пространством $QS(G\backslash\sigma\backslash S\backslash C\backslash R\backslash T)$, в котором отсутствуют все основные геометрические объекты: аффинные неметричность, кривизна и кручение, а также кватернионная неметричность и гамильтоново кручение (или Q-связность, то есть $\mathbf{q}_k = const$). В таком пространстве определяется Q-метрика, представляющая собой закон умножения «мнимых» кватернионных единиц и содержит декартову часть и антисимметричное по индексам бесследовое слагаемое. Операция кватернионного сопряжения позволяет записать декартову части Q-метрики со стандартным знаком («плюс»)

$$\mathbf{g}_{kn} \equiv \mathbf{q}_k \overline{\mathbf{q}}_n = \delta_{kn} - \varepsilon_{knj}\, \mathbf{q}_j \,. \qquad (6.1\text{-}1)$$

Как и в любом Q-пространстве с действительными координатами, квадрат трехмерного интервала в таком пространстве идентичен интервалу евклидова пространства

$$dr^2 = dx_k dx_n \mathbf{g}_{kn} = dx_k \mathbf{q}_k dx_n \overline{\mathbf{q}}_n = dx^2 + dy^2 + dz^2 \,,$$

то есть классическая процедура измерения длин, кстати, финальная и, по сути, главная акция любого физического измерения, оставляет специфику кватернионной структуры нераскрытой. Раскрытие этой специфики оказывается возможным в рамках квантово-механических представлений.

Пусть в рассматриваемом Q-пространстве есть магнитное поле B_j, (которое здесь никак не связывается с кватернионной структурой) и на этом фоне движется частица массы *m*, несущая электрический заряд *e*. Определяя стандартным образом обобщенный импульс частицы

$$P_k \equiv p_k - \frac{e}{c} A_k \,,$$

где p_k – механический импульс частицы, A_k – векторный потенциал магнитного поля, можно найти в Q-пространстве гамильтониан, вполне определяющий динамику движения частицы

$$H_{QE} = \frac{1}{2m} \mathbf{g}_{kn} P_k P_n = \frac{1}{2m} (P_k P_k - P_k P_n\, \varepsilon_{knj} \mathbf{q}_j) \,; \qquad (6.1\text{-}2)$$

индекс у символа *H* означает вычисление функции Гамильтона в кватернионном евклидовом пространстве.

Если частица классическая, то, как замечено выше, в определении (6.1-2) специфика Q-метрики оказывается не заметной: при умножении на симметричный по индексам коэффициент ее антисимметричная часть пропадает, и в суммировании участвует лишь декартова (евклидова) метрика.

Ситуация кардинально меняется, если частица является квантово-механической. В этом случае выражение для второго слагаемого в формуле (6.1-2) принимает вид

$$-\frac{e}{c}(p_k A_n + A_k p_n)\,\varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j\,. \qquad (6.1\text{-}3)$$

Поскольку при этом механический импульс частицы описывается оператором

$$p_k \equiv -i\hbar\,\partial_k\,,$$

сумма в скобках (6.1-3) не является симметричной и не пропадает при свертке ее индексов с индексами символа Леви-Чивиты. Подстановка результата коммутации

$$p_k A_n = -i\hbar\partial_k A_n + A_n p_k$$

в формулу (6.1-3) дает

$$-\frac{e}{c}(p_k A_n + p_n A_k - \frac{1}{2}i\hbar F_{kn})\,\varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j\,, \quad F_{kn} \equiv \partial_k A_n - \partial_n A_k\,.$$

Теперь сумма первых слагаемых в круглых скобках симметрична и в совокупности с дискриминантным тензором равна нулю, и функция Гамильтона приобретает вид

$$H_{QE} = \frac{1}{2m}(P_k P_k - \frac{e\hbar}{2c}F_{kn}\,\varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j)\,.$$

В развернутом виде в векторной форме

$$H_{QE} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{B}\,\vec{\boldsymbol{\sigma}}\,, \qquad \vec{\boldsymbol{\sigma}} \equiv -i\,\mathbf{q}_k \qquad (6.1\text{-}4)$$

эта функция есть в точности гамильтониан для заряженной квантово-механической частицы со спином во внешнем магнитном поле, записанный в свое время Паули из эвристических соображений:

$$H_{QE} = H_P\,.$$

При этом спиновая часть гамильтониана вычисляется вместе с коэффициентом $\mu = e\hbar/2mc$, который представляет собой выражение для магнетона Бора (с правильным знаком).[82]

Таким образом, спиновое взаимодействие (по крайней мере, для частиц, имеющих массу покоя и обычно характеризующихся полуцелым спином) может рассматриваться как физическое проявление кватернионных свойств самого пространства, в частности, простейшего Q-пространства. Следствием этого обстоятельства для самой частицы является то, что ее функция состояния с необходимостью должна иметь структуру матрицы, в данном случае строки или столбца.

Это весьма нестандартная трактовка, впрочем, определенно следующая из приведенного вывода гамильтониана Паули, возможно, в какой-то степени объясняет тот факт, что сам Вольфганг Паули (младший), имевший феноменальную физическую интуицию, отговорил Уленбека и Гаудсмита от публикации статьи об открытии спина, поскольку идея вращения электрона казалась ему в высшей степени нелепой [84]. Замечательно простой способ получения спинового слагаемого Паули в евклидовом Q-пространстве заставляет подумать о

[82] Спиновое слагаемое Паули было записано с неопределенным коэффициентом β, который определился из релятивистских уравнений Дирака (например, [83]).

движении частицы в пространстве с более сложной кватернионной структурой. Не ставя здесь слишком далеких целей, можно кратко рассмотреть второй простой пример: движение аналогичной частицы в магнитном поле, но на фоне следующего по сложности Q-пространства $QS(G \setminus \sigma \setminus S \setminus C \setminus R)$. Это чисто Q-метрическое (риманово-плоское) пространство, в котором отлична от нуля только метрическая Q-связность и, следовательно, гамильтоново кручение.

Гамильтониан определяется формулой, аналогичной (6.1-2); но поскольку теперь компоненты метрики (Q-триады) являются функциями координат, представляется естественным изменение геометрического фона учитывать минимально, то есть всегда, когда возможно, определять для метрических операторов (векторов Q-триады) место перед дифференциальным оператором (импульса)

$$H_{QH} = \frac{1}{2m}\mathbf{PP} = \frac{1}{2m}\mathbf{q}_k(-i\hbar\partial_k - \frac{e}{c}A_k)\overline{\mathbf{q}}_n(-i\hbar\partial_n - \frac{e}{c}A_n)\,; \qquad (6.1\text{-}5)$$

индекс у гамильтониана означает вычисление его в Q-пространстве с гамильтоновым кручением. Подстановка в формулу (6.1-5) коммутационного соотношения

$$\partial_k \overline{\mathbf{q}}_n = \omega_{knl}\overline{\mathbf{q}}_l + \overline{\mathbf{q}}_n\partial_k$$

дает

$$H_{QH} = \frac{1}{2m}\mathbf{q}_k\overline{\mathbf{q}}_l(-i\hbar\omega_{knl})P_n + H_P\,. \qquad (6.1\text{-}6)$$

Для выявления наиболее существенных черт влияния кватернионной структуры пространства на поведение частицы достаточно рассмотреть простейший вариант Q-связности, например, такой, все индексы которой принимают разное значение;[83] при этом, как не трудно убедиться, такая связность совпадает с тензором гамильтонова кручения и имеет единственную компоненту

$$\omega_{123} = -\omega_{132} = \omega\ . \qquad (6.1\text{-}7)$$

Подстановка (6.1-7) в первое слагаемое (6.1-6) – специфическое кватернионное дополнение к гамильтониану Паули – приводит функцию (6.1-6) к виду

$$H_{QH} = \frac{i\hbar\omega}{2m}\mathbf{q}_n P_n + H_P\,,$$

или в векторной форме

$$H_{QH} = -\frac{\hbar\omega}{2m}\vec{P}\vec{\boldsymbol{\sigma}} + H_P\,. \qquad (6.1\text{-}8)$$

Здесь следует подчеркнуть, что векторные матрицы $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ в первом члене (6.1-8) уже, конечно, не являются постоянными матрицами Паули, их компоненты – гладкие функции точек пространства, удовлетворяющие уравнению

$$\partial_1\boldsymbol{\sigma}_n = \omega_{1kn}\,\boldsymbol{\sigma}_n\,, \qquad k,n \neq 1\,. \qquad (6.1\text{-}9)$$

Очевидным решением (6.1-9) (одним из бесконечного множества) является Q-триада

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix}0 & e^{-i\omega x}\\ e^{i\omega x} & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix}0 & -i\,e^{-i\omega x}\\ i\,e^{i\omega x} & 0\end{pmatrix}$$

[83] Это условие не эквивалентно полной антисимметрии связности по всем индексам.

риманово-плоского Q-пространства с аксиально-линейной поляризацией вдоль вектора $\mathbf{q}_1$, определяющего направление координаты x.[84]

Вид функции (6.1-8) свидетельствует о том, что уже в самом простом неевклидовом Q-пространстве кватернионная структура может проявляться в виде членов специфического спинового взаимодействия импульса частицы с гамильтоновым кручением (Q-связностью) пространства, не зависимо от присутствия внешнего магнитного поля и наличия у квантовомеханической частицы электрического заряда. Так, гамильтониан (6.1-8) для незаряженной частицы приводится к виду

$$H_{QH} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta + 2i\,\omega\,\vec{\nabla}\,\vec{\boldsymbol{\sigma}});$$

то есть функция состояния и в отсутствие электромагнитных параметров частицы имеет матричную структуру.

Понятно, что гамильтониан квантовомеханической частицы, движущейся в Q-пространстве, может содержать слагаемые и с более сложным видом Q-связности, включающим не только различные компоненты гамильтонова кручения, но в общем случае и кватернионную неметричность. Однако, как отмечалось выше, задача исследования всех таких случаев в данной работе не ставится.

6.2. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ Q-ПРОСТРАНСТВАХ[85]

Выше (в главе 3) показано, что специфическая кватернионная геометрия Q-пространства, характеризующаяся собственно свойствами Q-триад и законом переноса векторов, определенным «внешним анализом» в касательном слое, является непротиворечивым дополнением к «внутренней» структуре пространства, определяемой его аффинной связностью и кривизной. Это обстоятельство провоцирует естественный вопрос: может ли «дополнительная» кватернионная специфика пространства влиять на его внутренние дифференциальные структуры, и если да, то каким образом это влияние можно установить, и в каких формах оно может проявляться?

Здесь стоит заметить, что никаких полевых уравнений собственно для Q-пространств пока не существует, это проблема будущего, когда надлежащим образом будет развит формализм дифференциальных операторов в Q-пространствах с комплексными координатами, часть которых будет иметь трактовку переменных физического времени (например, как это сделано в главе 5). Поэтому пока представляется резонным вернуться в рамки стандартных теорий с четырехмерным пространством-временем, где условия, связывающие дифференциальные и потенциальные характеристики многообразий хорошо определены: эти условия описываются полевыми уравнениями теорий гравитационного поля, в частности, уравнениями общей теории относительности Эйнштейна и ее обобщениями. Но в качестве трехмерных физических подпространств таких четырехмерных многообразий теперь предлагается рассматривать пространства кватернионные.

Эта идея представляется имеющий смысл, по крайней мере, по двум причинам.

Во-первых, кватернионная структура пространства, рассматриваемая как не зависимая от аффинной или римановой структур, может сама по себе являться источником кривизны и гравитационного поля. Такое «развитие событий» тем более возможно, что в рассмотренных выше схемах классификации Q-пространств есть характерные варианты пространств, «гравитационные» характеристики которых непосредственно зависят от кватернионной

[84] Любопытно, что в этом случае член спинового взаимодействия появляется в (6.1-8) не в результате «вращения электрона», а в результате поворота векторов триады на угол, пропорциональный длине смещения.

[85] Основные результаты этого параграфа опубликованы в работе [124]; при формулировке полевых уравнений и в методике решений использовались результаты, опубликованные работах [85], [86].

специфики. Одним из наиболее ярких примеров такого пространства является квазириманово Q-пространство, QS(G\σ\S\C), в котором кватернионное влияние проявляется в форме так называемой «минимальной связи»:[86] частные производные в определении тензора кривизны заменены производными, ковариантными относительно Q-связности. Поскольку в таких случаях Q-переменные рассматриваются как источники гравитации, для определения вида метрики достаточно решать вакуумные уравнения.

Во-вторых, с не меньшим основанием можно предполагать, что наличие кватернионных структур в Q-пространстве обусловлено спецификой структуры внешних источников гравитации, таких как физические поля (электромагнитные, спинорные, Янга-Миллса) или распределенные массивные источники (пыль, различного вида жидкости). Признавая заслуженное – и, безусловно, общепризнанное – «право на жизнь» таких подходов (вселенные Фридмана тому ярчайший пример и образец), все же следует отметить чрезвычайно высокую степень их эвристичности. Впрочем, последнее обстоятельство не помешало появлению многих вариантов обобщений теории гравитации Эйнштейна и публикации сотен их решений с самыми разнообразными источниками (см. обзор [111]).

Нелишне заметить, что каждый из двух вышеизложенных подходов при его реализации являет собой широкое, чуть ли не бесконечное поле для исследований. Но поскольку целью данной главы является только доказательное перечисление возможностей, предоставляемых включением фундаментальных кватернионных объектов в структуру дифференцируемых многообразий, здесь будут рассмотрен лишь ряд характерных моделей, приводящих к физически состоятельным решениям.

Уравнения структуры пространства-времени с трехмерным Q-сечением

Для осуществления и, по возможности, упрощения вычислений при решении поставленных задач следует избрать адекватный математический аппарат, позволяющий включать специфические характеристики трехмерного Q-пространства в геометрические объекты четырехмерного пространства-времени. Наиболее удобным здесь представляется метод дифференциальных форм, действующих в тангенциальном слое. Вообще говоря, можно было бы напрямую воспользоваться соответствующими формулами, данными в общем виде в рамках «внешнего анализа» Q-пространств в главе 3 (хотя при этом пришлось бы надлежащим образом обобщить их на случай четырехмерия). Но, так как этот метод здесь будет применен в сугубо технических, конкретных целях для вычисления форм связности, кривизны и компонент метрики, представляется резонным воспроизвести его в необходимых деталях для пространства-времени с Q-сечением.

Простой способ вычисления дифференциальных структур четырехмерного многообразия с трехмерным Q-сечением состоит в том, что метрические базисные 1-формы проецируются на формально вводимую кватернионную тетраду, образуя базисную 1-форму кватернион (со скалярной и 3-векторной частью).

Пусть формальным образом определяется «физическая» кватернионная тетрада[87] $q_{\mu} \equiv \{q_0, \mathbf{q}_k\}$, $q_0 = i$. Тогда базисная 1-форма-кватернион есть

$$\theta = q_{\mu}\theta^{\mu} = \theta^0 + \mathbf{q}_k\theta^k . \qquad (6.2\text{-}1)$$

[86] Термин minimal coupling – «минимальная связь» обычно предполагает учет в некотором полевом уравнении влияния дополнительного (например, калибровочного) поля посредством введения его характеристик лишь в виде связности (или добавки к связности) ковариантной производной.

[87] Приняты такие обозначения четырехмерных индексов буквами греческого алфавита: в базисе касательного пространства – первыми буквами (α, β, γ …), в голономном базисе – с середины алфавита (λ, μ, ν …).

Каждая из базисных (4-векторных) 1-форм есть свертка коэффициентов Ламе с дифференциалами координат голономного базиса $\theta^{\alpha} = g^{\alpha}_{\lambda} dx^{\lambda}$, поэтому произведение 1-формы (6.2-1) на комплексно сопряженную дает квадрат интервала пространства-времени[88]

$$\theta\,\theta^* = (i\theta^0 + \mathbf{q}_k\theta^k)(-i\theta^0 + \mathbf{q}_n\theta^n) = (\theta^0)^2 - \delta_{kn}\theta^k\theta^n = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} = ds^2 . \qquad (6.2\text{-}2)$$

Из (6.2-2) с очевидностью следует, что кватернионная структура трехмерного сечения пространства-времени – «физического» подпространства – никак не влияет на стандартное определение длины дуги и структуру метрического тензора – потенциала гравитационного поля.

Первые уравнения структуры

В то же время использование 1-формы (6.2-1) в первом уравнении структуры позволяет учесть в 1-форме связности полного многообразия ее кватернионную составляющую. Действительно, внешний дифференциал 1-формы (6.2-1), с одной стороны, должен быть выражен через 1-форму связности полного пространства-времени $\Omega^{\mu}{}_{\nu}$ (без 2-формы Q-неметричности σ^{μ})

$$d\theta = -q_{\mu}(\Omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} - \sigma^{\mu}) , \qquad (6.2\text{-}3)$$

а с другой – представим как дифференциал произведения

$$d\theta = dq_{\mu} \wedge \theta^{\mu} + q_{\mu}d\theta^{\mu} , \qquad (6.2\text{-}4)$$

где первое слагаемое в правой части

$$dq_{\mu} \wedge \theta^{\mu} = q_{\nu}\,\omega_{\lambda\mu}{}^{\nu}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{\mu} = q_{\nu}\,\omega^{\nu}{}_{\mu} \wedge \theta^{\mu}$$

содержит 1-форму собственной (метрической) Q-связности

$$\omega^{\nu}{}_{\mu} \equiv \omega_{\lambda\mu}{}^{\nu}\theta^{\lambda} . \qquad (6.2\text{-}5)$$

Используя соотношения (6.2-3), (6.2-4), (6.2-5), можно записать первые уравнения структуры рассматриваемого многообразия как коэффициенты при каждой из компонент кватернионной тетрады[89]

$$d\theta^{\mu} = -\Omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} + \sigma^{\mu} . \qquad (6.2\text{-}6)$$

Это стандартная форма первых уравнений структуры; но искомой функцией является 1-форма полной связности $\Omega^{\alpha}{}_{\beta}$, поэтому естественно переписать соотношение (6.2-6) в виде

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} = -d\theta^{\mu} + \hat{\omega}^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} = \tilde{\omega}^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} + \sigma^{\mu} , \qquad (6.2\text{-}7)$$

где $\tilde{\omega}^{\mu}{}_{\nu}$ – обычная метрическая («гравитационная») 1-форма связности, а 2-форма Q-неметричности выражается через компоненты тензора Q-неметричности $\hat{\sigma}_{\lambda\nu\mu}$ как кручение

$$\sigma^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\lambda\nu}{}^{\mu}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{\nu} . \qquad (6.2\text{-}8)$$

---

[88] Здесь и ниже всегда будет рассматриваться пространство-время с сигнатурой $(+---)$; δ_{kn} – трехмерный символ Кронекера со знаком «плюс».

[89] Последний член уравнения (6.2-6), конечно, может быть представлен в виде эквивалентной 2-формы гамильтонова кручения $-\omega^{\mu}{}_{\nu} \wedge \theta^{\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\lambda\nu}{}^{\mu}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{\nu} \equiv \Theta^{\mu}$, однако при вычислениях несколько удобнее работать с компонентами связности.

В целом из соотношений (6.2-7), (6.2-5) и (6.2-8) следует выражение для 1-формы полной связности

$$\Omega_{\mu\nu} = \widetilde{\omega}_{\mu\nu} + (\omega_{\lambda\nu\mu} + \sigma_{\lambda\nu\mu})\theta^{\lambda} \equiv \widetilde{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\lambda\nu\mu}\theta^{\lambda} = \widetilde{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu}, \qquad (6.2\text{-}9)$$

внешне схожее с определением (3-14) из главы 3, но отличающееся размерностью пространства и обобщенными на четырехмерие кватернионными характеристиками. Содержание последних требует уточнения.

Среди компонент «физической» кватернионной тетрады только векторы Q-триады могут являться функциями координат $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k(x^{\mu})$, в том числе – времени, определенном в тангенциальном слое всегда ортогонально 3-мерному кватернионному сечению. В свою очередь вынужденные повороты векторов, заданные коэффициентами Q-неметричности, также могут иметь место при переносе вдоль всех четырех направлений касательного пространства. В связи с этим суммарная Q-связность в пространстве-времени может иметь всего 12 компонент $\hat{\omega}_{\lambda kn}$ (в силу антисимметрии по трехмерным индексам), а 1-форма суммарной Q-связности записывается в виде следующего разложения по базисным 1-формам

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = -(\hat{\omega}_{0kn}\theta^{0} + \hat{\omega}_{jkn}\theta^{j})\,\delta^{k}_{\mu}\delta^{n}_{\nu}\,. \qquad (6.2\text{-}10)$$

Это разложение будет существенным образом использовано в анализе тензора кривизны.

Вторые уравнения структуры.

Алгоритм вычисления 2-формы кривизны задается вторыми уравнениями структуры

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\lambda\rho}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{\rho} = d\,\Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\rho} \wedge \Omega^{\rho}{}_{\nu}\,. \qquad (6.2\text{-}11)$$

Подстановка в (6.2-11) представления (6.2-9) 1-формы связности

$$R_{\mu\nu} = d\,\widetilde{\omega}_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}_{\mu\rho} \wedge \widetilde{\omega}^{\rho}{}_{\nu} + d\hat{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\nu} + \widetilde{\omega}_{\mu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\nu} - \widetilde{\omega}_{\nu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\mu} \qquad (6.2\text{-}12)$$

позволяет выделить три составляющих кривизны:

2-форму римановой кривизны

$$\widetilde{R}_{\mu\nu} = d\,\widetilde{\omega}_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}_{\mu\rho} \wedge \widetilde{\omega}^{\rho}{}_{\nu}\,, \qquad (6.2\text{-}13)$$

2-форму кватернионной кривизны

$$\hat{R}_{\mu\nu} = d\hat{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\nu}\,, \qquad (6.2\text{-}14)$$

2-форму взаимодействия римановой и кватернионной связностей

$$\Delta_{\mu\nu} = \widetilde{\omega}_{\mu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\nu} - \widetilde{\omega}_{\nu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\mu} \equiv 2\widetilde{\omega}_{\rho[\mu} \wedge \hat{\omega}_{\nu]}{}^{\rho} \qquad (6.2\text{-}15)$$

(квадратные скобки символизируют антисимметрию по индексам).

Из формальных соображений последняя составляющая может быть включена в любую из двух первых, при этом частная производная (обычный внешний дифференциал) становится ковариантной (внешний ковариантный дифференциал) с соответствующей связностью. Так, сумму (6.2-13) и (6.2-15) можно представить в виде обобщенной римановой кривизны

$$\hat{\widetilde{R}}_{\mu\nu} \equiv \widetilde{R}_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} = \hat{D}\widetilde{\omega}_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}_{\mu\rho} \wedge \widetilde{\omega}^{\rho}{}_{\nu}\,,$$

где

$$\hat{D}\omega_{\mu\nu} = d\omega_{\mu\nu} + \widetilde{\omega}_{\mu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\nu} + \widetilde{\omega}_{\rho\nu} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\mu}\,,$$

а сумму (6.2-14) и (6.2-15) – в виде обобщенной кватернионной кривизны

$$\tilde{\hat{R}}_{\mu\nu} \equiv \hat{R}_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} = \tilde{D}\hat{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\rho} \wedge \hat{\omega}^{\rho}{}_{\nu},$$

ковариантная производная в которой определена относительно римановой связности

$$\tilde{D}\hat{\omega}_{\mu\nu} = d\hat{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\rho} \wedge \tilde{\omega}^{\rho}{}_{\nu} + \hat{\omega}_{\rho\nu} \wedge \tilde{\omega}^{\rho}{}_{\mu}.$$

Столь высокая симметрия еще более подчеркивает и без того исключительные свойства кривизны, но в данном случае имеет, скорее, методический характер. С точки зрения пользы математической техники достаточным оказывается представление 2-формы полной кривизны в виде

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \hat{R}_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}, \tag{6.2-16}$$

которое вместе с формулами (6.2-13), (6.2-14) и (6.2-15) и будет использоваться для анализа функций пространства-времени с разными типами трехмерных Q-сечений.

Уравнения гравитационного поля в квазиримановом Q-пространстве

Квазириманово Q-пространство $QS(G \setminus \sigma \setminus S \setminus C)$ представляет девятый тип Q-пространств первой классификации (см. параграф 3.4, классификация «по неметричности»), оно характеризуется отсутствием аффинной и кватернионной неметричностей, а также картанова кручения. Ненулевыми остаются риманова кривизна (и связность Римана-Кристоффеля), а также собственная (метрическая) Q-связность. В таком пространстве выражение (6.2-9) для 1-формы связности редуцируется к виду

$$\Omega_{\mu\nu} = \tilde{\omega}_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \tag{6.2-17}$$

где нериманово слагаемое сводится исключительно к Q-метрической связности в соответствии с формулой (6.2-10)

$$\omega_{\mu\nu} = -(\omega_{0kn}\theta^0 + \omega_{jkn}\theta^j)\,\delta^k_\mu \delta^n_\nu. \tag{6.2-18}$$

В силу определения собственной Q-связности

$$dq_\mu = q_\nu \omega_{\lambda\mu}{}^{\nu}\theta^\lambda = q_\nu \omega_{\alpha\mu}{}^{\nu} dy^\alpha,$$

где dy^α – дифференциалы голономных координат, второй внешний дифференциал от кватернионной тетрады тождественно равен нулю

$$ddq_\mu = d(q_\nu \omega_{\alpha\mu}{}^{\nu} dy^\alpha) = q_\rho(\omega_{\beta\nu}{}^{\rho}\,\omega_{\alpha\mu}{}^{\nu} + \partial_\beta \omega_{\alpha\mu}{}^{\rho})\,dy^\beta \wedge dy^\alpha = 0,$$

откуда следует равенство нулю коэффициента при каждой компоненте Q-тетрады. Но как несложно видеть, каждый такой коэффициент представляет собой 2-форму кривизны, построенной из компонент метрической Q-связности, или

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \omega^{\rho}{}_{\nu} \wedge \omega^{\nu}{}_{\mu} + d\omega^{\rho}{}_{\mu} = 0.$$

Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени с трехмерным сечением $QS(G \setminus \sigma \setminus S \setminus C)$ кватернионная кривизна исчезает (как и в любом собственно Q-пространстве без Q-кручения, что было продемонстрировано в главе 3), и формула для 2-формы кривизны (6.2-16) существенно упрощается

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + 2\tilde{\omega}_{\rho[\mu} \wedge \omega_{\nu]}{}^{\rho}. \tag{6.2-19}$$

Из соотношения (6.2-19) в соответствии с (6.2-11) определяются все компоненты тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, обобщенного тензора Риччи (для отличия от 2-формы кривизны помечается звездочкой)

$$^*\mathrm{R}_{\lambda\rho} = R^{\mu}{}_{\lambda\rho\mu} ,$$

и вакуумные полевые уравнения

$$^*\mathrm{R}_{\lambda\rho} = 0 . \qquad (6.2\text{-}20)$$

Но прежде, чем приступать к выбору вида метрики и искать решения, полезно провести краткий общий анализ влияния кватернионных членов на вид уравнений (6.2-20).

Запись последнего слагаемого в формуле (6.2-19), дополнительного к римановой кривизне, с учетом лишь ненулевых компонент Q-связности (6.2-18)

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Delta_{\mu\nu\lambda\rho}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{\rho} = -2\widetilde{\omega}_{[\mu}{}^{k}\delta^{n}_{\nu]} \wedge (\omega_{0kn}\theta^{0} + \omega_{jkn}\theta^{j})$$

и выражения 1-формы римановой связности через коэффициенты вращения Риччи

$$\widetilde{\omega}_{\mu}{}^{\rho} \equiv -\Phi_{\lambda\mu}{}^{\rho}\theta^{\lambda}$$

позволяет выписать в общем виде все кватернионные добавки к тензору римановой кривизны

$$\Delta_{\mu\nu j0} = 2(\Phi_{j[\underline{\mu}}{}^{k}\omega_{0k\underline{\nu}]} - \Phi_{0[\underline{\mu}}{}^{k}\omega_{jk\underline{\nu}]}) , \qquad (6.2\text{-}21)$$

$$\Delta_{\mu n jm} = 2(\Phi_{m[\underline{\mu}}{}^{k}\omega_{jk\underline{n}]} - \Phi_{j[\underline{\mu}}{}^{k}\omega_{mk\underline{\nu}]}) . \qquad (6.2\text{-}22)$$

(антисимметрия по подчеркнутым индексам). Несложные, но требующие внимания вычисления имеют своим результатом следующие характерные добавки к тензору Риччи (также помечаются звездочкой), которые получаются сверткой соотношений (6.2-21) и (6.2-22)

$$^*\Delta_{00} \equiv \Delta^{n}{}_{00n} = -\Phi_{m0}{}^{k}\omega_{0k}{}^{m} + \Phi_{00}{}^{k}\omega_{mk}{}^{m} ,$$

$$^*\Delta_{n0} = \Delta^{m}{}_{n0m} = \Phi_{m}{}^{mk}\omega_{0kn} - \Phi_{mn}{}^{k}\omega_{0k}{}^{m} - \Phi_{0}{}^{mk}\omega_{mkn} + \Phi_{0n}{}^{k}\omega_{mk}{}^{m} . \qquad (6.2\text{-}23)$$

$$^*\Delta_{0n} = \Delta^{m}{}_{0nm} = \Phi_{n0}{}^{k}\omega_{mk}{}^{m} - \Phi_{m0}{}^{k}\omega_{nk}{}^{m} ,$$

$$^*\Delta_{mj} = \Delta^{0}{}_{mj0} + \Delta^{n}{}_{mjn} = \Phi_{j0}{}^{k}\omega_{0km} - \Phi_{00}{}^{k}\omega_{jkm} - \Phi_{nm}{}^{k}\omega_{jk}{}^{n} + \Phi_{n}{}^{nk}\omega_{jkm} + \Phi_{jn}{}^{k}\omega_{nk}{}^{n} - \Phi_{j}{}^{nk}\omega_{nkm} .$$

Из формул (6.2-23) видно, что обобщенный тензор Риччи, в рассматриваемом пространстве-времени не симметричен по индексам; при этом, конечно, все его компоненты должны исчезать в силу уравнений поля (6.2-20).

Ниже решения таких уравнений будет рассматриваться, в основном, для «вращательно» поляризованных пространств, Q-триады которых осуществляют равномерное вращение вокруг одного из направлений,[90] при этом отлична от нуля всего одна компонента Q-связности ω_{0kn} (пространственные индексы могут принимать значения 1 - 2, 2 - 3 или 3 - 1, в зависимости от направления поляризации). В этом случае все уравнения поля для рассматриваемого пространства времени имеют вид

[90] Подобного типа поляризация физических трехмерных сечений пространства-времени рассматривалась многими авторами в обобщениях теории гравитации на многообразия с картановым кручением (см., например, работу [87], а также обзор [111]).

$$^{*}\widetilde{\mathrm{R}}_{00} + \Phi_{m0}{}^{k}\omega_{0k}{}^{m} = 0\,, \tag{6.2-24}$$

$$^{*}\widetilde{\mathrm{R}}_{0n} = 0\,, \tag{6.2-25}$$

$$^{*}\widetilde{\mathrm{R}}_{n0} + \Phi_{m}{}^{mk}\omega_{0kn} - \Phi_{mn}{}^{k}\omega_{0k}{}^{m} = 0\,, \tag{6.2-26}$$

$$^{*}\widetilde{\mathrm{R}}_{mj} + \Phi_{j0}{}^{k}\omega_{0km} = 0\,. \tag{6.2-27}$$

В силу симметрии тензора Риччи из уравнений (6.2-26) и (6.2-25) следует алгебраическое соотношение между компонентами Q-связности и коэффициентами вращения Риччи (римановой связностью)

$$\Phi_{m}{}^{mk}\omega_{0kn} - \Phi_{mn}{}^{k}\omega_{0k}{}^{m} = 0\,. \tag{6.2-28}$$

Последнее уравнение можно рассматривать как необходимое условие математической согласованности заданной поляризации и выбранной модели пространства. Действительно, если задать, например, поляризацию вдоль оси 3 (только $\omega_{012} \neq 0$), то из уравнения (6.2-28) следует

$$(\Phi_{mm1} - \Phi_{221})\omega_{012} = \Phi_{331}\omega_{012} = 0\,,$$

$$(-\Phi_{mm2} + \Phi_{112})\omega_{012} = -\Phi_{332}\omega_{012} = 0\,,$$

или

$$\Phi_{331} = \Phi_{332} = 0\,. \tag{6.2-29}$$

Очевидно, для указанной поляризации следует выбирать такие компоненты метрики, чтобы построенные из них коэффициенты вращения Риччи (которые легко вычисляются как коэффициенты 1-форм связности) удовлетворяли соотношениям (6.2-29); в противном случае нулевым оказывается кватернионный параметр. Аналогичные (6.2-29) несложно записать и для «линейной» поляризации Q-сечений, где поворот Q-триады обусловлен зависимостью от пространственной координаты.

Завершая обзор общего вида полевых уравнений (6.2-24)-(6.2-27), можно также отметить, что их решения (если таковые найдутся) будут отличаться от решений для пространств с поляризованным картановым кручением (например, для пространств типа U_4). Это обуславливается тем, что в уравнениях (6.2-24)-(6.2-27) гамильтоново кручение входит линейно (как отмечалось выше – как «минимальная связь»), тогда как в пространствах типа U_4 полевые уравнения содержат квадратичные члены по тензору картанова кручения.

Теперь, в качестве примера использования уравнений (6.2-24)-(6.2-27), можно проверить, какие из метрик с простыми симметриями могут иметь своим пространственным сечением поляризованное Q-пространство.

<u>Нестационарная анизотропная модель</u>.

Пусть задано следующий вид нестационарной метрики

$$ds^2 = dt^2 - e^{2f(t)}(dx + 2S\,dy) - e^{2u(t)}dy^2 - e^{2g(t)}dz^2\,, \tag{6.2-30}$$

с базисными 1-формами

$$\theta^0 = dt\,, \quad \theta^1 = e^{f(t)}dx + 2Se^{f(t)}dy\,, \quad \theta^2 = e^{u(t)}dy\,, \quad \theta^3 = e^{g(t)}dz\,. \tag{6.2-31}$$

Предполагается, что анизотропия метрики (6.2-30) обусловлена вращением Q-триады вдоль оси *z* – «вращательной» поляризацией

$$\mathbf{q}_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\sigma t} \\ e^{i\sigma t} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{q}_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\sigma t} \\ ie^{i\sigma t} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{q}_3 = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (6.2\text{-}32)$$

при этом отличная от нуля компонента Q-связности есть $\omega_{012} = \sigma$. С помощью первых уравнений структуры по заданному виду базисных 1-форм (6.2-31) вычисляются компоненты римановой связности

$$\tilde{\omega}_{01} = \dot{f}\,\theta^1 + h\theta^2, \qquad \tilde{\omega}_{02} = h\theta^1 + \dot{u}\,\theta^2, \qquad \tilde{\omega}_{03} = \dot{g}\,\theta^3, \qquad \tilde{\omega}_{12} = h\theta^0,$$

где

$$h \equiv \dot{S}\,e^{f-u},$$

а также

$$\tilde{\omega}_{13} = \tilde{\omega}_{23} = 0 .$$

Из последнего соотношения следует, что уравнения (6.2-29) – необходимое условие согласованности вида метрики и поляризации (6.2-32) выполняется.

С помощью вторых уравнений структуры по формулам (6.2-12) или (6.2-19) определяются сначала 2-форма кривизны, затем – компоненты и тензора кривизны

$$R_{0101} = \ddot{f} + \dot{f}^2 - h^2 - \sigma h, \qquad R_{0102} = \dot{h} + 2\dot{f}^2 h - \sigma\dot{u}, \qquad R_{0202} = \dot{h} + 2\dot{f}^2 h + \sigma\dot{u},$$

$$R_{0202} = \ddot{u} + \dot{u}^2 + 3h^2 + \sigma h, \qquad R_{0303} = \ddot{g} + \dot{g}^2, \qquad R_{1212} = h^2 + \dot{f}\,\dot{u},$$

$$R_{1313} = -\dot{f}\,\dot{g}, \qquad R_{1323} = -h\,\dot{g}, \qquad R_{2323} = -\dot{u}\,\dot{g} .$$

Далее вычисляются компоненты обобщенного тензора Риччи, равенство которых нулю задает уравнения поля

$$^*\mathrm{R}_{00} = \ddot{f} + \dot{f}^2 + \ddot{u} + \dot{u}^2 + \ddot{g} + \dot{g}^2 + 2h^2 = 0,$$

$$^*\mathrm{R}_{11} = -\ddot{f} - \dot{f}^2 - \dot{f}\,\dot{u} + 2h^2 + \sigma h = 0,$$

$$^*\mathrm{R}_{12} = -\dot{h} - 2\dot{f}^2 h - \dot{g}\,h^2 + \sigma\dot{u} = 0,$$

$$^*\mathrm{R}_{21} = -\dot{h} - 2\dot{f}^2 h - \dot{g}\,h^2 - \sigma\dot{f} = 0,$$

$$^*\mathrm{R}_{22} = -\ddot{u} - \dot{u}^2 - \dot{u}\,\dot{g} - 2h^2 - \sigma h = 0,$$

$$^*\mathrm{R}_{33} = -\ddot{g} - \dot{g}^2 - \dot{f}\,\dot{g} - \dot{u}\,\dot{g} = 0 .$$

Из этой системы уравнений видно, что Q-кручение, действительно, совместимо с формой метрики и содержится во всех уравнениях, кроме первого и последнего.

Разность недиагональных компонент системы уравнений

$$^*\mathrm{R}_{12} - {}^*\mathrm{R}_{21} = \sigma(\dot{u} + \dot{f}) = 0,$$

имеет своим следствием соотношение между функциями

$$\dot{u} + \dot{f} = 0 . \qquad (6.2\text{-}33)$$

В простейшем случае

$$\dot{u} = \dot{f} = 0 . \qquad (6.2\text{-}34)$$

Вычитание уравнения $^*\mathrm{R}_{33} = 0$ из уравнения $^*\mathrm{R}_{00} = 0$ дает

$$h = 0, \qquad (6.2\text{-}35)$$

что означает постоянство функций e^f, e^u и S метрики; надлежащим подбором этих констант метрика приводится к диагональному виду. При этом все уравнения системы тождественно удовлетворяются, кроме последнего

$$ {}^*\mathrm{R}_{33} = -\ddot{g} - \dot{g}^2 = 0\,, \tag{6.2-36} $$

которое сразу точно решается

$$ e^g = 1 + \sigma t\,, \tag{6.2-37} $$

(постоянные интегрирования выбраны так, чтобы не нарушалась размерность величин и удовлетворялся принцип соответствия: в отсутствие поляризации метрика становится статической и плоской).

Вторая возможность выполнения условия (6.2-33) представляется равенством

$$ \dot{u} = -\dot{f}\,. \tag{6.2-38} $$

В этом случае уравнение ${}^*\mathrm{R}_{33} = 0$ вновь имеет вид (6.2-34), и с учетом этого из уравнения ${}^*\mathrm{R}_{00} = 0$ следует

$$ {}^*\mathrm{R}_{00} = 2\dot{f}^2 + 2h^2 = 0\,; $$

но так как все функции предполагаются действительными, решение вновь сводится к соотношениям (6.2-34), (6.2-35) и (6.2-37).

В этом варианте решения метрика оказывается существенно анизотропной. Уравнение (6.2-36), впрочем, предполагает и тривиальное решение с плоской статической метрикой, на которую поляризация не оказывает никакого влияния.

Попытка решения уравнений для метрики (6.2-30) с источником в виде изотропной поляризованной жидкости в сопутствующих координатах оказывается неплодотворной. Тензор энергии-импульса такой жидкости есть

$$ T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) v_\mu v_\nu - p\delta_{\mu\nu}\,, \tag{6.2-39} $$

где ε – плотность энергии, p – давление, $v^\mu = \delta^\mu_0$ – четырехмерная скорость частиц, при этом поляризация жидкости в рамках принятого здесь подхода относится не к свойствам частиц, а к кватернионной структуре пространства. Уравнения с источником (6.2-39) удобно записать в виде

$$ {}^*\mathrm{R}_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}T\right), \tag{6.2-40} $$

($\kappa \equiv 8\pi G/c^2$, G – ньютоновская гравитационная постоянная, $T = \delta^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$), из которого следует, что недиагональные компоненты обобщенного тензора Риччи исчезают, а значит, выполняется условие (6.2-33), удовлетворение которого любым из соотношений (6.2-34) или (6.2-38) приводит к вакуумному решению (6.2-34), (6.2-35) и (6.2-37).

<u>Статическая сферически-симметричная модель</u>

Предполагается, что сферически-симметричное статическое пространство время

$$ ds^2 = e^{2f(r)}dt^2 - e^{2h(r)}dr^2 - e^{2g(r)}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{6.2-41} $$

с естественными базисными 1-формами

$$ \theta^0 = e^f dt\,, \qquad \theta^1 = e^h dr\,, \qquad \theta^2 = e^g d\theta\,, \qquad \theta^3 = \sin\theta\, e^h d\varphi\,. \tag{6.2-42} $$

может быть геометрически согласовано с радиальной поляризацией Q-пространства, в котором отличными от нуля компонентами Q-связности могут быть $\omega_{023} = \sigma$ («вращательная» поляризация) и $\omega_{123} = \tau$ («линейно-радиальная» поляризация). Пространство-время с такой симметрией имеет следующие компоненты полной 1-формы связности

$$\omega_{01} = f'e^{-h}\theta^0, \qquad \omega_{02} = \omega_{03} = 0, \qquad \omega_{12} = g'e^{-h}\theta^2,$$

$$\omega_{13} = g'e^{-h}\theta^3, \qquad \omega_{23} = -\sigma\,\theta^0 - \tau\,\theta^1 + \cot\theta\, e^{-g}\theta^3;$$

и тензора кривизны

$$R_{0101} = (f'' + f'^2 - f'\,h')e^{-2h}, \qquad R_{0202} = R_{0303} = -f'\,g'e^{-2h},$$

$$R_{1212} = R_{1313} = (g'' + g'^2 - g'h')e^{-2h}, \qquad R_{2323} = g'^2 e^{-2h} - e^{-2g},$$

$$R_{1230} = -\sigma\, g'e^{-h}, \qquad R_{1320} = \sigma\, g'e^{-h},$$

$$R_{1231} = -\tau\, g'e^{-h}, \qquad R_{1321} = \tau\, g'e^{-h}.$$

Обобщенный тензор Риччи содержат Q-параметр только в следующих недиагональных компонентах (равных нулю в силу уравнений поля)

$$^*\mathrm{R}_{23} = -^*\mathrm{R}_{32} = \tau\, g'e^{-h} = 0; \qquad (6.2\text{-}44)$$

но так как $g' \neq 0$ (для плоской метрики $g' = 1/r$), из (6.2-44) следует $\tau = 0$, то есть угол поворота Q-триады не зависит от расстояния до центра симметрии.[91] Параметр «вращательной» поляризации σ в уравнениях поля не участвует и на функции метрики не влияет. Включение источника в виде идеальной жидкости ситуацию с очевидностью не меняет.

Стационарная цилиндрически-симметричная модель

Цилиндрически-симметричные модели широко обсуждены в общей теории относительности и ее обобщениях.[92] Квадрат интервала такого пространства-времени в достаточно общем виде (стационарная метрика) имеет вид

$$ds^2 = (dt + e^{\chi(r)}d\varphi)^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - e^{2\nu(r)}d\varphi^2 - e^{2\varsigma(r)}\,dz^2 \qquad (6.2\text{-}45)$$

с базисными 1-формами

$$\theta^0 = dt + e^{\chi}d\varphi, \quad \theta^1 = e^{\lambda}dr, \quad \theta^2 = e^{\nu}d\varphi, \quad \theta^3 = e^{\varsigma}dz.$$

Как и в предыдущей модели предполагается, что поляризация, совместимая с цилиндрической симметрией может быть «вращательной» $\omega_{012} = \sigma$ и «линейно-аксиальной» $\omega_{112} = \tau$. При этих условиях первые уравнения структуры дают следующие выражения для компонент полной 1-формы связности

$$\omega_{01} = h\theta^2, \qquad \omega_{02} = -h\theta^1, \qquad \omega_{03} = -0,$$

$$\omega_{12} = (\sigma - h)\theta^0 + \tau\theta^1 + \nu'e^{-\lambda}\theta^2, \quad \omega_{13} = \varsigma'e^{-h}\theta^3, \quad \omega_{23} = 0,$$

где сделано обозначение

---

[91] Уравнение (6.2-44) для случая «радиально-линейной» поляризации представляет собой аналог условия (6.2-29), рассмотренного выше для «вращательной» поляризации.

[92] Для метрик с цилиндрической симметрией известны многие точные решения общей теории относительности и ее обобщений, включающих картаново кручение: в вакууме [88], [89], и с источниками в виде пыли и идеальной жидкости [125], [126].

$$h \equiv \frac{1}{2}\chi' e^{\chi-\lambda-\nu} . \qquad (6.2\text{-}46)$$

Из вторых уравнений структуры вычисляются компоненты обобщенного тензора кривизны[93]

$$R_{0101} = R_{0202} = h(\sigma - h) , \qquad R_{0121} = R_{1210} = -h' e^{-\lambda} ,$$

$$R_{0212} = \tau h , \qquad R_{0323} = -\varsigma' h e^{-\lambda} ,$$

$$R_{1212} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') - 3h^2 + 2\sigma h , \qquad R_{1313} = e^{-2\lambda}(\varsigma'' + \varsigma'^2 - \varsigma'\lambda') ,$$

$$R_{2303} = \varsigma' e^{-\lambda}(\sigma - h) , \qquad R_{2313} = \tau \varsigma' e^{-\lambda} , \qquad R_{2323} = \varsigma' \nu' e^{-2\lambda} .$$

Компоненты обобщенного тензора Риччи и вакуумные уравнения поля имеют вид

$$^*\mathrm{R}_{00} = 2h(\sigma - h) = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{01} = \tau h = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{02} = e^{-\lambda}(h' + \varsigma' h) = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{11} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \varsigma'' + \varsigma'^2 - \varsigma'\lambda') - 2h^2 + \sigma h = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{20} = e^{-\lambda}[h' + \varsigma'(h - \sigma)] = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{21} = \tau \varsigma' e^{-\lambda} = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{22} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \nu'\varsigma') - 2h^2 + \sigma h = 0 ,$$
$$^*\mathrm{R}_{33} = e^{-2\lambda}(\varsigma'' + \varsigma'^2 - \varsigma'\lambda' + \varsigma'\nu') = 0 .$$

Уравнение $^*\mathrm{R}_{20} - ^*\mathrm{R}_{02} = 0$ есть условие (6.2-29) совместимости выбранного вида метрики с «вращательной» поляризацией, а уравнения $^*\mathrm{R}_{01} = 0$ и $^*\mathrm{R}_{21} = 0$ – аналог этого условия для «аксиально-линейной» поляризации. Эти условия удовлетворяются следующими вариантами соотношений:

1) присутствуют обе поляризации $\sigma \ne 0$, $\tau \ne 0$, $h = 0$, $\varsigma' = 0$, при этом метрика становится статической, но в оставшихся уравнениях нет кватернионных параметров в явном виде;
2) присутствует только «аксиально-линейная» поляризация: $\tau \ne 0$, $\sigma = 0$, $h = 0$, $\varsigma' = 0$, случай сводится к предыдущему;
3) присутствует только «вращательная» поляризация: $\sigma \ne 0$, $\tau = 0$, $\varsigma' = 0$, метрика остается стационарной.

Третий вариант очевидно содержательнее двух первых, и он рассматривается подробно. В силу уравнения $\varsigma' = 0$ масштаб вдоль оси симметрии постоянен

$$e^{\varsigma} = 1 . \qquad (6.2\text{-}47)$$

Из уравнения $^*\mathrm{R}_{00} = 0$, $^*\mathrm{R}_{20} = ^*\mathrm{R}_{02} = 0$ с необходимостью следует

$$h = \sigma = const ,$$

---

[93] Здесь Q-сечение задано в касательном слое ортогонально вектору θ^0, поэтому функции Q-триады удобно считать зависящими от неголономных координат (временной и радиальной). При вычислении кривизны во вторых уравнениях структуры производные функций по голономным координатам приводят к появлению в компоненте R_{1212} неисчезающей части кватернионной кривизны $2\sigma h$, которая в данном случае существенно не влияет на вид решения.

то есть угловая скорость вращения Q-триад постоянна, и, как следует из определения (6.2-46), присутствие именно этого кватернионного параметра является причиной стационарности метрики. При этом уравнения ${}^{*}\mathrm{R}_{11} = 0$, ${}^{*}\mathrm{R}_{22} = 0$ точно одинаковы, и в результате для решения остается следующая система из двух уравнений с тремя неизвестными

$$e^{-2\lambda}\,(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') = \sigma^2\,, \tag{6.2-48}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\chi' e^{\chi-\lambda-\nu} = const\,. \tag{6.2-49}$$

Несмотря на то, что эта система недоопределена, она разрешается практически до конца без необходимости предположения о виде одной из функций. Действительно, если заметить, что

$$e^{\nu-\lambda}\,(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') = (\nu'\,e^{\nu-\lambda})'\,,$$

то из уравнения (6.2-48) следует

$$(\nu'\,e^{\nu-\lambda})' = \sigma^2\,e^{\nu+\lambda}\,, \tag{6.2-50}$$

но в силу уравнения (6.2-49) правая часть (6.2-50) есть полная производная

$$\sigma\,e^{\nu+\lambda} = \frac{1}{2}\chi' e^{\chi} = \frac{1}{2}(e^{\chi})'\,, \tag{6.2-51}$$

так что (6.2-50) можно один раз проинтегрировать

$$\nu'\,e^{\nu-\lambda} = \frac{\sigma}{2}e^{\chi} + a\,, \qquad a = const\,. \tag{6.2-52}$$

Здесь удобно сделать упрощающие обозначения

$$e^{\lambda} \equiv u\,, \qquad e^{\nu} \equiv y\,, \qquad e^{\chi} \equiv x\,;$$

при этом все величины, включая σ, считаются отличными от нуля.[94] Тогда уравнения (6.2-51) и (6.2-52) принимают вид

$$x' = 2\sigma\,u\,y\,, \tag{6.2-53}$$

$$\frac{1}{u}y' = \frac{\sigma}{2}x + a\,. \tag{6.2-54}$$

Выделение из уравнения (6.2-53) функции u

$$u = \frac{1}{2\sigma\,y}x' \tag{6.2-55}$$

и подстановка ее в уравнение (6.2-54) после деления на σ дает уравнение

$$2yy' = \frac{1}{2}xx' + \frac{a}{\sigma}x'\,,$$

которое также сразу интегрируется

$$y^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{a}{\sigma}x + b\,, \quad b = const\,,$$

---

[94] В избранной системе координат (6.2-45) функции $e^{\nu} = y$, $e^{\chi} = x$ и величина, обратная Q-параметру, измеряются в единицах длины $[y] = [x] = [1/\sigma] = см$, а функция $e^{\lambda} = u$ и постоянная интегрирования a – безразмерны

и может быть представлено в виде алгебраического квадратного уравнения относительно функции x

$$x^2 + \frac{4a}{\sigma} x + 4(b - y^2) = 0 .$$

Это уравнение имеет решения

$$x = \frac{2a}{\sigma}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{b\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2 y^2}{a^2}} \right). \qquad (6.2\text{-}56)$$

Поскольку функция $x = e^{\chi}$ определяет существенную стационарность (нестатичность) метрики, она, измеряясь в единицах длины, должна – с физических позиций – быть пропорциональной Q-параметру. Это соображение позволяют выбрать знак перед радикалом. Если выбран знак плюс, то предел функции (6.2-56) при малом значении Q-параметра есть

$$\lim_{\sigma \to 0} x = \frac{2a}{\sigma}\left(-1 + 1 - \frac{b\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2 y^2}{4a^2} \right) = \frac{\sigma}{a}(y^2 - b) ,$$

что вполне удовлетворяет соображениям размерности и физического смысла. Выбор же знака минус в (6.2-56)

$$\lim_{\sigma \to 0} x = \frac{2a}{\sigma}\left(-2 + \frac{b\sigma^2}{4} - \frac{\sigma^2 y^2}{4a^2} \right) \to \infty ,$$

как видно, неприемлем, то есть функция, задающая нестатичность метрики, имеет вид

$$x = e^{\chi} = \frac{2a}{\sigma}\left(\sqrt{1 - \frac{b\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2 y^2}{a^2}} - 1 \right). \qquad (6.2\text{-}57)$$

Теперь производную x' можно найти как функцию лишь переменной y

$$x' = \frac{2\sigma\, y y'}{a}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{a^2}(y^2 - b)} \right)^{-1}$$

и из уравнения (6.2-55) определить функцию u

$$u = e^{\lambda} = \frac{y'}{\sqrt{a^2 + \sigma^2 (y^2 - b)}} . \qquad (6.2\text{-}58)$$

Из физических соображений

$$\lim_{\sigma \to 0} u = \frac{y'}{a} = 1 ,$$

откуда следует физически резонное выражение для последней искомой функции

$$y = e^{\nu} = ar + c ,$$

где начало отсчета длины радиуса удобно выбрать в точке $c = 0$, а масштабный фактор длины – единичным: $a = 1$, то есть

$$y = e^{\nu} = r . \qquad (6.2\text{-}59)$$

Итак, все искомые функции метрики определены, интервал (6.2-45) после подстановки формул (6.2-47), (6.2-57), (6.2-58), (6.2-59) приобретает вид

$$ds^2 = dt^2 + \frac{4}{\sigma}\left[\sqrt{1+\sigma^2(r^2-b)}-1\right]dt\,d\varphi - \frac{dr^2}{1+\sigma^2(r^2-b)} - \left\{r^2 - \frac{4}{\sigma^2}\left[\sqrt{1+\sigma^2(r^2-b)}-1\right]^2\right\}d\varphi^2 - dz^2\,,$$

где постоянная интегрирования b измеряется в единицах квадрата длины. Если $b>0$, то на интервале $0 \le r < \sqrt{b}$ условие положительности подкоренных выражений в функциях метрики накладывает дополнительное условие на величину Q-параметра $\sigma < 1/\sqrt{b}$, а на расстоянии $r_0 = \sqrt{b}$ от оси симметрии метрика становится статической и плоской. Физических оснований для такой особенности не просматривается, поскольку Q-параметр аксиальной поляризации в пространстве постоянен: $\sigma = const$. Если же $b<0$, то метрика особенностей не имеет, постоянная b играет пассивную роль. Эти рассуждения склоняют к тому, чтобы положить $b=0$. Тогда квадрат интервала приобретает окончательный вид

$$ds^2 = dt^2 + \frac{4}{\sigma}\left(\sqrt{1+\sigma^2 r^2}-1\right)dt\,d\varphi - \frac{dr^2}{1+\sigma^2 r^2} - \left[r^2 - \frac{4}{\sigma^2}\left(\sqrt{1+\sigma^2 r^2}-1\right)\right]d\varphi^2 - dz^2\,, \qquad (6.2\text{-}60)$$

демонстрирующий пример влияния кватернионных свойств трехмерного пространства на гравитационное поле пространства-времени: наличие Q-поляризации ($\sigma \ne 0$) индуцирует стационарность метрики, будучи неполяризованным, ($\sigma \to 0$) этот мир становится статическим и плоским.

Детальный анализ геометрии пространства-времени (6.2-60) и движения частиц в нем не входит в задачу данного исследования, но об одной его особенности, однако, стоит упомянуть. В работе [125] показано, что пространство-время вида (6.2-45), может формироваться распределенным источником (идеальной жидкостью), мировые линии элементов (частиц) которого являются геодезическими в сопутствующей системе отсчета. Этот факт позволяет достаточно просто проанализировать полевые уравнения типа (6.2-40) для метрики (6.2-45) с источником в виде тензора энергии-импульса (6.2-39)

$$^*\mathrm{R}_{00} = 2h(\sigma - h) = -\frac{\kappa}{2}(\varepsilon + 3p)\,, \qquad (6.2\text{-}61)$$

$$^*\mathrm{R}_{11} = {}^*\mathrm{R}_{22} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') - 2h^2 + \sigma h = -\frac{\kappa}{2}(\varepsilon - p)\,, \qquad (6.2\text{-}62)$$

$$^*\mathrm{R}_{33} = 0 = -\frac{\kappa}{2}(\varepsilon - p)\,, \qquad (6.2\text{-}63)$$

из недиагональных компонент уравнений следуют прежние соотношения

$$\sigma \ne 0\,, \quad \tau = 0\,, \quad \varsigma' = 0\,, \quad e^{\varsigma} = 1\,, \quad h = const\,.$$

Уравнение (6.2-63) имеет своим следствием «жесткое» уравнение состояния $\varepsilon = p$. Можно заметить, что из оставшихся уравнений Q-параметр поляризации σ не определяется, так же как и его зависимость от координат. Если считать его постоянным и пропорциональным параметру стационарности

$$\sigma = s\,h = const\,,$$

то из уравнения (6.2-61) следует выражение плотности энергии через параметр h

$$\varepsilon = p = \frac{(1-s)\,h^2}{2\kappa}\,, \qquad (6.2\text{-}64)$$

а уравнения (6.2-62) принимают вид, аналогичный (6.2-48)

$$e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda') = (2-s)\,h^2\,. \qquad (6.2\text{-}65)$$

Система уравнений (6.2-65) и

$$h=\frac{1}{2}\chi' e^{\chi-\lambda-\nu}=const$$

имеет решение, с точностью до постоянных схожее с метрикой, полученной для вакуумного пространства-времени

$$ds^2=dt^2+\frac{4}{(2-s)\,h}\left(\sqrt{1+(2-s)^2h^2(r-r_0)^2}-1\right)dt\,d\varphi-\frac{dr^2}{1+(2-s)^2h^2(r-r_0)^2}-$$

$$-\left[r^2-\frac{4}{(2-s)^2h^2}\left(\sqrt{1+(2-s)^2h^2(r-r_0)^2}-1\right)\right]d\varphi^2-dz^2\,. \qquad (6.2\text{-}66)$$

Квадрат интервала (6.2-66) описывает гравитационное поле цилиндрически-симметрично распределенной в аксиально поляризованном Q-пространстве идеальной жидкости, плотность энергии и давление которой определены уравнением (6.2-64). Существенно, что в отсутствие поляризации пространства ($\sigma=s=0$) метрика, представленная интервалом (6.2-66), становится точным решением уравнений общей теории относительности

$$ds^2=dt^2+\frac{2}{h}\left(\sqrt{1+4h^2(r-r_0)^2}-1\right)dt\,d\varphi-\frac{dr^2}{1+4h^2(r-r_0)^2}-$$

$$-\left[r^2-\frac{1}{h^2}\left(\sqrt{1+4h^2(r-r_0)^2}-1\right)\right]d\varphi^2-dz^2\,. \qquad (6.2\text{-}67)$$

для цилиндра, состоящего из жидкости с жестким уравнением состояния

$$\varepsilon=p=\frac{h^2}{2\kappa}=const\,. \qquad (6.2\text{-}68)$$

Интересно заметить, что решения вида (6.2-67), (6.2-68) не приведены в известном справочнике точных решений ОТО [89].

Завершая данный раздел, можно отметить следующие основные черты влияния кватернионной специфики пространств типа $QS(G\setminus\sigma\setminus S\setminus C)$ на метрики четырехмерного пространства-времени.

1. Учет в уравнениях гравитационного поля поляризации трехмерного пространства, как собственного вращения Q-триад, в отличие от поляризации, эмпирически задаваемой картановым кручением, не дает эффектов теории Эйнштейна-Картана: устранение начальных сингулярностей космологических моделей, возможности существования непустых статических моделей вселенной.

2. Кватернионная поляризация такого вида оказывается заметной в полевых уравнениях и в метриках только для специальных анизотропных моделей; тем не менее, ее учет позволяет получать физически состоятельные решения, имеющие аналоги в общей теории относительности.

Уравнения гравитационного поля в пространстве с Q-неметричностью[95]

Поскольку собственная Q-связность не дает вклада в тензор кривизны, представляется небесполезным рассмотреть четырехмерное пространство-время, пространственное сечение которого содержит кватернионную неметричность. Характерный пример такого сечения – Q-пространство $QS(G\setminus T\setminus S)$, принадлежащее к ветви пространств типа $(1')$ второго варианта классификации (по аффинным характеристикам; см. главу 3). Пространство такого типа свободно как от аффинной неметричности $S=0$, так и от кручения $T=0$, причем в данном

[95] Часть результатов этого раздела опубликована в работе [127].

случае будет предполагаться, что картаново и гамильново кручение (собственная Q-связность) не компенсируют друг друга, а исчезают по отдельности $C = 0$, $H = 0$. Отличными от нуля остаются риманова кривизна $R \neq 0$ и чистая Q-неметричность $\sigma \neq 0$.

Стоит, видимо, несколько подробнее, чем в главе 3 пояснить действие механизма поворота Q-триад в пространствах с Q-неметричностью, где для каждого вектора Q-триады (как любого другого вектора) в Q-пространстве устанавливается закон переноса

$$\delta \mathbf{q}_{\mathrm{k}} = -\Omega_{jkn}\mathbf{q}_n dx_j \,. \tag{6.2-69}$$

Это изменение вектора связано исключительно со свойствами геометрии пространства; изменение компонент вектора как функций точки учитывается в абсолютном дифференциале $D\mathbf{q}_{\mathrm{k}}$, который в сумме с геометрическим изменением (6.2-69) определяет полное изменение вектора

$$\delta \mathbf{q}_{\mathrm{k}} + D\mathbf{q}_k = d\mathbf{q}_n \,. \tag{6.2-70}$$

Выражение $\delta \mathbf{q}_{\mathrm{k}}$ из формулы (6.2-70) и подстановка в (6.2-69) дает

$$d\,\mathbf{q}_{\mathrm{k}} - D\mathbf{q}_k = -\Omega_{jkn}\mathbf{q}_n dx_j \,. \tag{6.2-71}$$

В общем случае Q-пространство может иметь связность, включающую три разнородные составляющие: коэффициенты вращения Риччи, собственную Q-связность, и произвольную Q-неметричность [см. главу 3, формулу (3-14)]

$$\Omega_{jkn} = \Phi_{jkn} + \omega_{jkn} + \sigma_{jkn} \;. \tag{6.2-72}$$

Полный дифференциал вектора Q-триады выражается через собственную Q-связность, поэтому подстановка (6.2-72) в (6.2-71) приводит к определению кватернионной неметричности

$$D\mathbf{q}_k = (\Phi_{jkn} + \sigma_{jkn})\mathbf{q}_n dx_j : \tag{6.2-73}$$

ковариантный дифференциал базисного кватернионного вектора отличен от нуля, значит, относительно Q-ковариантной производной не постоянна и Q-метрика. Из формулы (6.2-73) видно, что Q-неметричность связности (6.2-72) обусловлена наличием коэффициентов вращения Риччи («риманова Q-неметричность») и произвольно заданной функцией поворота при переносе вектора. Наличие в Q-пространстве этих объектов вынуждает осуществлять поворот все векторы, в том числе, не зависящие от координат. Так, для постоянной Q-триады $d\mathbf{q}_{\tilde{\mathrm{k}}} = 0$, но если в пространстве присутствует Q-неметричность

$$\hat{\sigma}_{jkn} = \Phi_{jkn} + \sigma_{jkn} \,,$$

то, согласно закону (6.2-69)

$$\delta \mathbf{q}_{\tilde{\mathrm{k}}} = -\hat{\sigma}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{n}}\mathbf{q}_{\tilde{n}} dx_{\tilde{j}} \tag{6.2-74}$$

триада осуществляет малый поворот. Существенно подчеркнуть, что функция неметричности $\hat{\sigma}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{n}}$ задана в каждой точке Q-пространства не зависимо от структуры Q-триады, поэтому соотношение (6.2-74) на является дифференциальным уравнением для векторов $\mathbf{q}_{\mathrm{k}}$ (решив которое можно найти зависимость, например, 2×2-матричного представления $\mathbf{q}_{\mathrm{k}}$ от координат), а есть определение вынужденного поворота базиса, представленного в данном случае постоянными матрицами. Геометрический смысл Q-неметричности тот же, что и у собственной Q-связности: компоненты $\hat{\sigma}_{jkn}$ с повторяющимися индексами задают искривление координатных линий (направляющими которых являются векторы Q-триады), а компоненты со всеми различными индексами определяют закрученность этих линий вокруг самих себя. Однако, в отличие от собственной Q-связности, которая может быть результатом зависимости Q-триады от времени (угловая скорость вращения), индексы Q-неметричности могут принимать только пространственные значения.[96]

Возвращаясь к пространству $QS(G \setminus T \setminus S)$ – предполагаемому Q-сечению пространства-времени, – следует отметить, что в нем присутствуют оба вида Q-неметричности, но если риманова часть Φ_{jkn} ответственна за формирование относительной напряженности гравитационного поля – тензора Римана-Кристоффеля, то чистая Q-неметричность σ_{jkn} рассматривается как эвристический параметр поляризации. Из множества его вариантов выделяется самый простой, описываемый полностью антисимметричным тензором

$$\sigma_{jkn} = \sigma(x^{\mu})\,\varepsilon_{jkn} \ , \qquad (6.2\text{-}75)$$

такая неметричность поворачивает Q-триаду на одинаковый угол при переносе ее начала в любом из трех направлений, что в известном смысле согласуется с представлением об изотропии трехмерного пространства.

Для пространства-времени с Q-сечением $QS(G \setminus T \setminus S)$ и Q-неметричностью (6.2-75) записываются компоненты 1-формы связности

$$\omega_{\mu\nu} = \tilde{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\nu} \ ,$$

где

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu} = -\Phi_{\lambda\mu\nu}\,\theta^{\nu} ,$$

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = -\sigma\,\delta^{m}_{\mu}\delta^{n}_{\nu}\varepsilon_{jmn}\,\theta^{j} , \qquad (6.2\text{-}76)$$

и 2-формы кривизны

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{\omega}_{\mu\kappa} \wedge \hat{\omega}^{\kappa}{}_{\nu} - \tilde{\omega}_{\nu\kappa} \wedge \hat{\omega}^{\kappa}{}_{\mu} + \hat{R}_{\mu\nu} ,$$

содержащие риманову кривизну

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = d\tilde{\omega}_{\mu\nu} + \tilde{\omega}_{\mu\kappa} \wedge \tilde{\omega}^{\kappa}{}_{\nu} \ ,$$

смешанные члены, и кривизну Q-неметричности

$$\hat{R}_{\mu\nu} = d\hat{\omega}_{\mu\nu} + \hat{\omega}_{\mu\kappa} \wedge \hat{\omega}^{\kappa}{}_{\nu} \ , \qquad (6.2\text{-}77)$$

которая, как было отмечено выше, не исчезает и представляет наибольший интерес.

Подстановка выражения (6.2-76) в определение (6.2-77) дает

$$\hat{R}_{\mu\nu} = -(\partial_{\lambda}\sigma)\,\delta^{m}_{\mu}\delta^{n}_{\nu}\varepsilon_{jmn}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{j} + \sigma^{2}\delta^{m}_{\mu}\delta^{k}_{\kappa}\delta^{\kappa}_{p}\delta^{n}_{\nu}\varepsilon_{jmk}\varepsilon_{l}{}^{.p}{}_{n}\theta^{j} \wedge \theta^{l} , \qquad (6.2\text{-}77)$$

то есть 2-форма кривизны, составленной из коэффициентов Q-неметричности имеет только пространственные компоненты

$$\hat{R}_{mn} = -(\partial_{\lambda}\sigma)\,\varepsilon_{jmn}\theta^{\lambda} \wedge \theta^{j} - \sigma^{2}\varepsilon_{jmk}\varepsilon_{lkn}\theta^{j} \wedge \theta^{l} .$$

Последнее слагаемое упрощается простым преобразованием

$$-\sigma^{2}\varepsilon_{jmk}\varepsilon_{lkn}\,\theta^{j} \wedge \theta^{l} = \sigma^{2}(\delta_{jl}\delta_{mn} - \delta_{ml}\delta_{nj})\theta^{j} \wedge \theta^{l} = \sigma^{2}\delta_{ml}\delta_{nj}\theta^{l} \wedge \theta^{j} ,$$

или

[96] Это означает, что коэффициенты вращения Риччи четырехмерного пространства-времени с временными компонентами не входят в число компонент Q-неметричности.

$$\hat{R}_{mn} = -(\partial_\lambda \sigma)\, \varepsilon_{jmn} \theta^\lambda \wedge \theta^j + \sigma^2 \delta_{ml} \delta_{nj} \theta^j \wedge \theta^l ,$$

откуда сразу следуют все компоненты тензора кривизны, порождаемого Q-неметричностью (6.2-75)

$$\hat{R}_{mnj0} = \dot{\sigma}\, \varepsilon_{jmn} , \qquad (6.2\text{-}78)$$

$$\hat{R}_{1213} = \hat{R}_{3112} = \partial_1 \sigma , \qquad \hat{R}_{1223} = \hat{R}_{2321} = \partial_2 \sigma , \qquad \hat{R}_{3132} = \hat{R}_{2331} = \partial_3 \sigma , \qquad (6.2\text{-}79)$$

$$\hat{R}_{1212} = \hat{R}_{1313} = \hat{R}_{2323} = \sigma^2 . \qquad (6.2\text{-}80)$$

Компоненты (6.2-78) очевидно не дают вклада в обобщенный тензор Риччи и в уравнения поля (хотя величина σ , конечно, может зависеть от времени). Из компонент кривизны (6.2-79) строятся следующие компоненты обобщенного тензора Риччи

$${}^*\hat{\mathrm{R}}_{23} = -{}^*\hat{\mathrm{R}}_{32} = \partial_1 \sigma , \qquad {}^*\hat{\mathrm{R}}_{31} = -{}^*\hat{\mathrm{R}}_{13} = \partial_2 \sigma , \qquad {}^*\hat{\mathrm{R}}_{12} = -{}^*\hat{\mathrm{R}}_{21} = \partial_3 \sigma . \qquad (6.2\text{-}81)$$

Поскольку тензор Риччи (построенный из компонент тензора Римана-Кристоффеля) по индексам симметричен, соотношения (6.2-81) могут иметь два следствия. Либо в уравнениях поля антисимметричные по индексам пространственные компоненты обобщенного тензора Риччи некоторым специальным образом компенсируются смешанными членами (произведениями римановой связности и Q-неметричности), либо все компоненты (6.2-81) исчезают, и Q-метричность в касательном слое является пространственной константой

$$\partial_k \sigma = 0 , \qquad \sigma = \sigma(x^0) . \qquad (6.2\text{-}82)$$

В дальнейшем будет предполагаться выполнение условия (6.2-82). Наконец, как несложно видеть, компоненты кривизны (6.2-80) дают вклад в диагональные компоненты обобщенного тензора Риччи

$${}^*\hat{\mathrm{R}}_{11} = {}^*\hat{\mathrm{R}}_{22} = {}^*\hat{\mathrm{R}}_{33} = 2\sigma^2 ,$$

в скалярную кривизну

$${}^*\hat{\mathrm{R}} = -6\sigma^2$$

и в обобщенный тензор Эйнштейна

$${}^*\hat{\mathrm{R}}_{00} = 3\sigma^2 , \qquad (6.2\text{-}83)$$

$${}^*\hat{\mathrm{R}}_{11} + \frac{1}{2}{}^*\hat{\mathrm{R}} = {}^*\hat{\mathrm{R}}_{22} + \frac{1}{2}{}^*\hat{\mathrm{R}} = {}^*\hat{\mathrm{R}}_{33} + \frac{1}{2}{}^*\hat{\mathrm{R}} = -\sigma^2 . \qquad (6.2\text{-}84)$$

В предыдущем разделе, где рассматривались только смешанные произведения компонент римановой и кватернионной связности, показано, что содержащиеся в них кватернионные параметры могут воздействовать на геометрию анизотропных метрик, но не заметны в пространства-времени с высокой степени симметрии. Полученные же здесь соотношения (6.2-83), (6.2-84) являют собой факторы влияния на геометрию пространства-времени, существенно более сильные, чем смешенные произведения римановых и кватернионных объектов, поскольку в данном случае квадрат изотропной Q-неметричности (6.2-75) содержится в диагональных компонентах уравнений поля. Формально наличие такой кватернионной добавки аналогично присутствию в уравнениях космологического члена или спина источника, геометризованного картановым кручением; сходным может быть и влияние на геометрию. Ниже рассмотрены простые примеры пространства-времени с изотропной Q-неметричностью в пространственном сечении $QS(G \setminus T \setminus S)$.

Изотропная модель вселенной с бесконечным радиусом кривизны.

Квадрат интервала

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\lambda(t)}(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

с базисными 1-формами

$$\theta^0 = dt + e^{\chi} d\varphi, \quad \theta^1 = e^{\lambda} dr, \quad \theta^2 = e^{\nu} d\varphi, \quad \theta^3 = e^{\varsigma} dz$$

и заданная Q-неметричность

$$\sigma_{jkn} = \sigma(t)\,\varepsilon_{jkn} \ ,$$

определяют компоненты 1-форм связности

$$\omega_{01} = \dot{\lambda}\theta^1, \quad \omega_{02} = \dot{\lambda}\theta^2, \quad \omega_{03} = \dot{\lambda}\theta^3,$$

$$\omega_{12} = -\sigma\,\theta^3, \quad \omega_{31} = -\sigma\,\theta^2, \quad \omega_{23} = -\sigma\,\theta^1.$$

Отличны от нуля следующие компоненты тензора кривизны

$$R_{0123} = R_{0231} = R_{0312} = 2\sigma\dot{\lambda}, \quad R_{1203} = R_{3102} = R_{2301} = \dot{\sigma} + \dot{\lambda}\sigma,$$

$$R_{0101} = R_{0202} = R_{0303} = \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2, \quad R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = -\dot{\lambda}^2 + \sigma^2,$$

из которых только компоненты последней строки вносят вклад в обобщенный тензор Риччи

$${}^*\mathrm{R}_{00} = 3(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2), \quad {}^*\mathrm{R}_{11} = {}^*\mathrm{R}_{22} = {}^*\mathrm{R}_{33} = -\ddot{\lambda} - 3\dot{\lambda}^2 + 2\sigma^2$$

и скалярную кривизну

$${}^*\mathrm{R} = 6\ddot{\lambda} + 12\dot{\lambda}^2 - 6\sigma^2.$$

Пусть источником гравитации является пыль

$$T_{00} = \varepsilon(t), \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0;$$

тогда три функции λ, σ и ε должны удовлетворять системе двух полевых уравнений[97]

$${}^*\mathrm{R}_{00} - \frac{1}{2}R = -\kappa T_{00} \quad \Rightarrow \quad -3\dot{\lambda}^2 + 3\sigma^2 = -\kappa\,\varepsilon, \tag{6.2-85}$$

$${}^*\mathrm{R}_{ii} + \frac{1}{2}R = -\kappa T_{ii} \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{\lambda} + 3\dot{\lambda}^2 - \sigma^2 = 0, \tag{6.2-86}$$

для разрешения которой, таким образом, нужно дополнительное условие.

Простейшее условие подсказывается структурой уравнения (6.2-85), представленного в виде

$$\kappa\frac{\varepsilon}{3} + \sigma^2 = \dot{\lambda}^2;$$

отсюда следует, что в данном случае кривизна пространства-времени имеет два независимых источника: плотность энергии распределенного вещества и кватернионную неметричность. Поскольку в центре внимания именно Q-неметричность, в качестве дополнительного условия например, пропорциональная зависимость плотности энергии и функции Q-неметричности

$$\kappa\frac{\varepsilon}{3} = k\sigma^2,$$

[97] Нет суммирования по индексу i.

где постоянная $k \geq 0$. Если $k = 0$, то имеет место случай вакуума: $\varepsilon = 0$. При этом система уравнений (6.2-85), (6.2-86) принимает вид

$$\sigma = \pm\dot{\lambda}\,, \qquad \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 = 0$$

и имеет простое решение

$$e^{\lambda} = a + bt\,, \qquad \sigma = \frac{b}{a + bt}\,,$$

(6.2-87)

a, b – постоянные интегрирования.

В случае строгого неравенства $k > 0$ система (6.2-85), (6.2-86) сводится к виду

$$\sigma = \pm\frac{\dot{\lambda}}{k+1}, \qquad \ddot{\lambda} + n\,\dot{\lambda}^2 = 0\,,\ n \equiv \frac{k/2+1}{k+1}$$

и имеет решение

$$e^{\lambda} = (A + B\,t)^{\frac{1}{n}}\,, \quad \sigma = \frac{\pm B}{n\,(k+1)\,(A+Bt)^{1/n}}\,, \quad \kappa\,\varepsilon = \frac{3B^2}{n^2\,(k+1)^2\,(A+Bt)^{2/n}}\,, \qquad (6.2\text{-}88)$$

где A, B – константы интегрирования.

Наконец, не исключается случай не зависящей от времени Q-неметричности $\sigma = const$; для него из системы уравнений (6.2-86), (6.2-85) метрическая функция и плотность энергии определяются в следующем виде

$$e^{\lambda} = \left[C\exp\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\,t\right) + D\right]^{\frac{2}{3}}, \qquad (6.2\text{-}89)$$

$$\kappa\,\varepsilon = \sigma^2\left[1 + C^2\exp(\pm\sqrt{3}\,\sigma\,t)\right]e^{-\frac{3}{2}\lambda}\,, \qquad (6.2\text{-}90)$$

здесь C и D – постоянные интегрирования.

И если в решениях (6.2-87) и (6.2-88) константы второго интегрирования (соответственно a и A), могут быть нулевыми, позволяя расширяться каждой модели линейно по времени из сингулярности, то пространство-время с метрической функцией (6.2-89) определенно несингулярно. Знак плюс в показателе экспоненты означает бесконечное расширение модели из сферы с начальным масштабом

$$e^{\lambda(0)} = (C + D)^{2/3}, \qquad (6.2\text{-}91)$$

где плотность энергии пыли конечна

$$\kappa\,\varepsilon(0) = \frac{\sigma^2(1 + C^2)}{C + D}\,. \qquad (6.2\text{-}92)$$

Знак минус соответствует «гладкому» сжатию модели от сферы масштаба (6.2-91) и плотности (6.2-92) к сфере с линейным масштабом

$$e^{\lambda(\infty)} = D^{2/3}$$

и плотностью энергии

$$\kappa\,\varepsilon(\infty) = \sigma^2 / D\,.$$

Итак, наличие изотропной Q-неметричности в трехмерном сечении простейшей космологической модели приводит к серии простых метрик, среди которых есть и несингулярное решение. В то же время стоит отметить, что и сама идея поляризации пространства за счет Q-неметричности, и процедура введения этого объекта в структуру пространства-времени, и сами решения полевых уравнений существенно отличны от «технологии», принятой в обобщениях теории гравитации Эйнштейна на пространства аффинной связности с картановым кручением. Другим показательным примером этого различия является вывод решения уравнений гравитации для статического сферически симметричного пространства.

Статическая сферически симметричная модель с псевдоизотропной Q-неметричностью

Имея в виду соотношения (6.2-80) из предыдущего раздела, а также тот факт, что вид эйнштейновских уравнений гравитации для сферически-симметричной статической метрики

$$ds^2 = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{6.2-93}$$

известен (например, из книги Р.Толмена [90], см. также работы [128]-[131]), соответствующие обобщенные уравнения можно было бы написать сразу. Однако, во избежание ошибок и для сохранения целостности восприятия основные этапы вывода уравнений лучше привести. Базисные (метрические) 1-формы для квадрата интервала (6.2-93) имеют вид

$$\theta^1 = e^{\lambda(r)}dr\,, \quad \theta^2 = r\,d\theta\,, \qquad \theta^3 = r\sin\theta\, d\varphi\,.$$

Для детализации дальнейшего анализа уравнений Q-неметричность здесь резонно задать в «псевдоизотропном» (почти изотропном) виде

$$\sigma_{312} \equiv a\,, \qquad \sigma_{231} \equiv b\,, \qquad \sigma_{123} \equiv c\,,$$

где $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ – меры вынужденного вращения Q-триады в трех направлениях (соответственно вдоль векторов $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_1$); если эти меры одинаковы, то Q-неметричность – изотропна.

Из первых уравнений структуры следует вид компонент 1-формы полной связности (штрих означает производную по координате r)

$$\omega_{01} = \nu' e^{-\lambda}\theta^0\,, \qquad \omega_{02} = \omega_{03} = 0\,,$$

$$\omega_{12} = \frac{e^{-\lambda}}{r}\theta^2 + a\theta^3\,, \qquad \omega_{13} = \frac{e^{-\lambda}}{r}\theta^3 - b\theta^2\,, \qquad \omega_{23} = \frac{1}{r}\cot\theta\,\theta^3 + c\theta^1\,.$$

Вторые уравнения структуры позволяют вычислить компоненты обобщенного тензора кривизны

$$R_{0101} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda')\,, \quad R_{0202} = R_{0303} = -\frac{\nu'}{r}e^{-2\lambda}\,, \qquad R_{0203} = -a\nu' e^{-\lambda}\,,$$

$$R_{0302} = b\nu' e^{-\lambda}\,, \qquad R_{1212} = -\frac{\lambda'}{r}e^{-2\lambda} + bc\,, \qquad R_{1213} = e^{-\lambda}(a' + \frac{a}{r} - \frac{c}{r})\,,$$

$$R_{1223} = \frac{\cot\theta}{r}(a-b)\,, \qquad R_{1313} = -\frac{\lambda'}{r}e^{-2\lambda} + ac\,, \qquad R_{1312} = e^{-\lambda}(-b' - \frac{b}{r} + \frac{c}{r})\,,$$

$$R_{2323} = -\frac{1}{r} + \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} + ab\,,$$

обобщенного тензора Риччи

$${}^*\mathrm{R}_{00} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r})\,, \qquad {}^*\mathrm{R}_{11} = e^{-2\lambda}(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\lambda'}{r}) + c(a+b)\,,$$

$$^*\mathrm{R}_{22}=\frac{e^{-2\lambda}}{r}(\frac{1}{r}-\lambda'+\nu')-\frac{1}{r}+b(a+c)\,,\qquad ^*\mathrm{R}_{33}=\frac{e^{-2\lambda}}{r}(\frac{1}{r}-\lambda'+\nu')-\frac{1}{r}+a(b+c)\,,$$

$$^*\mathrm{R}_{23}=e^{-\lambda}(a'+a\nu'+\frac{a-c}{r})\,,\qquad ^*\mathrm{R}_{32}=e^{-\lambda}(-b'-b\nu'-\frac{b-c}{r})\,,$$

$$^*\mathrm{R}_{13}=\frac{\cot\theta}{r}(a-b)$$

и скалярной кривизны

$$\frac{1}{2}{}^*\mathrm{R}=e^{-2\lambda}(\nu''+\nu'^2-\nu'\lambda'+\frac{2\nu'-2\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2})+\frac{1}{r^2}-(ab+bc+ac)\,.$$

Пусть в простейшем случае источником гравитации является пыль с плотностью энергии ε в сопутствующих координатах; но влияние на метрику, конечно, оказывает и поляризация самого физического пространства, представленная Q-неметричностью. Тогда уравнения поля

$$\mathrm{G}_{\sigma\tau}\equiv{}^*\mathrm{R}_{\sigma\tau}-\frac{1}{2}\delta_{\sigma\tau}{}^*\mathrm{R}=-\kappa\varepsilon\delta_{\sigma0}\delta_{\tau0}$$

записываются в следующей явной форме

$$\mathrm{G}_{00}=-\kappa\varepsilon \qquad\Rightarrow\qquad e^{-2\lambda}(-\frac{2\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2})-\frac{1}{r^2}-(ab+bc+ac)=-\kappa\varepsilon\,,$$

$$\mathrm{G}_{11}=0 \qquad\Rightarrow\qquad -e^{-2\lambda}(-\frac{2\nu'}{r}+\frac{1}{r^2})+\frac{1}{r^2}-ab=0\,,$$

$$\mathrm{G}_{22}=0 \qquad\Rightarrow\qquad -e^{-2\lambda}(\nu''+\nu'^2-\nu'\lambda'+\frac{\nu'-\lambda'}{r})-ac=0\,,$$

$$\mathrm{G}_{33}=0 \qquad\Rightarrow\qquad -e^{-2\lambda}(\nu''+\nu'^2-\nu'\lambda'+\frac{\nu'-\lambda'}{r})-bc=0\,,$$

$$\mathrm{G}_{23}=0 \qquad\Rightarrow\qquad e^{-\lambda}(a'+a\nu'+\frac{a-c}{r})=0\,,$$

$$\mathrm{G}_{32}=0 \qquad\Rightarrow\qquad -e^{-\lambda}(b'+b\nu'+\frac{b-c}{r})=0\,,$$

$$\mathrm{G}_{13}=0 \qquad\Rightarrow\qquad \frac{\cot\theta}{r}(a-b)=0\,.$$

Несложно видеть, что эта система уравнений в части, касающейся римановых величин, точно совпадает с известными результатами вычислений (см. книгу [90]). В то же время обращает на себя внимание высокая степень симметрии, с которой компоненты Q-неметричности присутствуют в выписанных уравнениях. Действительно, из уравнения $\mathrm{G}_{13}=0$ сразу следует равенство компонент Q-неметричности, определенных трансляциями на сфере: $a=b$, в силу этого эквивалентными друг другу оказывается уравнения $\mathrm{G}_{22}=0$ и $\mathrm{G}_{33}=0$, равно как и уравнения $\mathrm{G}_{23}=0$, $\mathrm{G}_{32}=0$; таким образом, из семи уравнений поля независимыми остаются лишь четыре уравнения для пяти неизвестных функций: $\lambda,\nu,a,c,\varepsilon$.[98] Для упрощения ситуации можно предположить, что компонента Q-

[98] Легко проверить, что закон движения источника (в данном случае, закон сохранения массы) $\nabla_\tau G^{\sigma\tau}=0$ тождественно удовлетворяется.

неметричности, реализующая поляризацию в радиальном направлении, пропорциональна компоненте поляризации по сфере[99]

$$c = ka\,, \qquad k = const\,,$$

при этом система полевых уравнений редуцируется к виду

$$\text{(i)} \qquad e^{-2\lambda}\left(\frac{2\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - (1+2k)a^2 = \kappa\varepsilon\,,$$

$$\text{(ii)} \qquad e^{-2\lambda}\left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + a^2 = 0\,,$$

$$\text{(iii)} \qquad e^{-2\lambda}\left(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) + ka^2 = 0\,,$$

$$\text{(iv)} \qquad a' + a\nu' + \frac{1-k}{r}a = 0\,.$$

Видно, что уравнение для геометрической функции поляризации содержится в полученной системе, при этом сама эта функция после интегрирования уравнения (iv) выражается через одну из функций метрики

$$a = \frac{A}{r^{1-k}}e^{-\nu}\,, \qquad A = const\,. \tag{6.2-94}$$

Уравнение (i) позволяет найти плотность энергии источника по известным функциям метрики. Замкнутую систему для этих функций представляют собой уравнения (ii) и (iii) после подстановки в них выражения (6.2-94); однако эта система оказывается сложной, и найти ее решение в общем виде и даже в частном случае оказывается весьма затруднительно.

Поэтому будет рассматриваться только случай пустого пространства с нулевой плотностью энергии физического источника $\varepsilon = 0$. Хотя при этом система оказывается переопределенной (некоторую свободу оставляет выбор значения постоянной *k*), но на пути интегрирования системы здесь можно продвинуться несколько дальше. Сначала полезно вычислить сумму уравнений (i) и (ii)

$$e^{-2\lambda}(\nu' + \lambda') - ka^2 r = 0\,, \tag{6.2-95}$$

после чего можно заметить, что при учете (6.2-94) уравнение (iii) принимает вид (после умножения на $e^{2\lambda}$)

$$\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{2\nu'}{r} = 0\,.$$

Это уравнение имеет два решения: простое

$$e^{\nu} = 1 \tag{6.2-96}$$

– ниже оно еще подвергнется обсуждению – и более сложное (первый интеграл)

$$(e^{\nu})' = \frac{R^2}{r^2}e^{\lambda}\,, \qquad R = const\,. \tag{6.2-97}$$

Соотношение (6.2-97) между метрическими функциями не содержит параметра поляризации и оказывается общим для вакуумного решения ОТО (метрика Шварцшильда) и для рассматриваемой поляризованной модели. Таким образом, в более сложном случае исходная система сводится к трем уравнениям (6.2-94), (6.2-95), (6.2-97) и к одному из двух первых

[99] Отказ в уравнениях от поляризации по сфере $a = b = 0$ с необходимости влечет исчезновение и радиальной поляризации: $c = 0$.

уравнений: (i) или (ii). Вначале уравнение (6.2-95) преобразуется подстановкой в него соотношений (6.2-94) и (6.2-97)

$$-(\nu'-\lambda')e^{2\nu-2\lambda}+2\frac{R}{r^2}e^{\nu-\lambda}-kA^2r^{2k-1}=0,$$

и затем после обозначения $y\equiv e^{\nu-\lambda}$ приводится к виду

$$yy'-2\frac{R}{r^2}y+kA^2r^{2k-1}=0. \qquad (6.2\text{-}98)$$

Это нелинейное уравнение первого порядка относительно функции $y(r)$, можно было бы попытаться найти его решение. Но, откладывая пока эту задачу, стоит обратить внимание на уравнение (ii), которое также можно преобразовать, используя соотношения (6.2-94), (6.2-97) и определение функции $y(r)$

$$y^2+2\frac{R}{r^2}y+A^2r^{2k}=e^{2\nu}; \qquad (6.2\text{-}99)$$

видно, что здесь представлено алгебраическое соотношение между метрической функцией $e^{2\nu}$ и функцией $y(r)$. Очевидно, уравнения (6.2-98) и (6.2-99) должны быть разрешены совместно. Для упрощения дальнейшего анализа целесообразно продифференцировать уравнение (6.2-99) по координате r и вычесть из результата уравнение (6.2-98); при этом исчезают производные от функции y^2, а также члены, содержащие параметр поляризации A, результат имеет вид

$$ry'+y=\frac{r^2}{R}\nu'e^{2\nu}.$$

Левая части этого уравнения есть полная производная, если в правой вновь применить соотношение (6.2-97) и определение функции $y(r)$, то получается соотношение

$$(ry)'=ye^{2\lambda}, \qquad (6.2\text{-}100)$$

верное, как и (6.2-97), и для ОТО, и для рассматриваемой поляризованной модели. Считая теперь, что $(ry)'\neq 0$, можно разделить соответственно левые и правые части уравнений (6.2-99) и (6.2-100); после приведения подобных членов получается уравнение

$$yy'-2\frac{R}{r^2}y-A^2r^{2k-1}=0,$$

в точности совпадающее с уравнением (6.2-98) при условии $k=-1$, то есть система уравнений совместна лишь для радиальной поляризации пространства, противоположной изотропному случаю. При этом остается единственное уравнение

$$yy'-2\frac{R}{r^2}y-\frac{A^2}{r^3}=0,$$

для которого несложно найти частное решение (единственное в виде степенной функции)

$$y=\frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha=const.$$

Это решение, однако, не удовлетворяет условию $(ry)'\neq 0$ и, в силу соотношения (6.2-100), не имеет физического смысла; попытки поиска иных решений, учитывающих соотношение (6.2-97), успеха не имели.

Однако, как отмечено выше, имеется другое – простое решение (6.2-96) для одной метрической функции $e^{2\nu}=1$, $\varepsilon=0$. В этом случае вид функции поляризации упрощается

$$a = \frac{A}{r^{1-k}}, \tag{6.2-101}$$

а из уравнения (ii) сразу следует выражение для второй метрической функции

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - A^2 r^{2k}}. \tag{6.2-102}$$

Для получения этого решения использовались уравнения (i), (ii) и (iv), но несложно проверить, что им удовлетворяется и уравнение (iii). Привлекательной чертой данного простого решения является возможность вариации значений параметра изотропии *k*. Так, в случае изотропной поляризации $k = 1$ решение в точности соответствует модели изотропной однородной вселенной Эйнштейна, но без источника; при этом роль космологического члена играет квадрат Q-неметричности – аналогично роли картанова кручения в похожих моделях теории Эйнштейна-Картана. Нет очевидных препятствий и для предположений о других значениях параметра *k*.

Завершая этот раздел – и вместе с ним главу – стоит еще раз отметить, что несколько предложенных к рассмотрению примеров пространства-времени с кватернионным трехмерными сечениями приведены лишь для демонстрации возможностей применения Q-пространств в четырехмерной теории гравитации.[100] Однако автор не склонен рассматривать столь прикладное направление развития кватернионной теории пространства-времени в качестве основного. Предпочтительной, скорее, представляется формулировка такой теории гравитации, которая была бы согласована со схемой кватернионной теории относительности и соответствующей ей пространственно-временной структурой, о которой говорилось в главе 5. Тем не менее, полученные и в рамках минимально обобщенной стандартной теории тяготения модели с Q-сечениями оказываются весьма физичными, геометрия поляризации – прозрачной, а процедура получения их решения – интересной.

[100] Анализ свойств полученных решений не входил в задачи этого исследования, хотя тема выявления эффектов геометрической поляризации, в том числе возможных эффектов движения частиц в полях кручения интересна и может иметь прикладное значение (см., например, [91]).