6.3. ПРОСТРАНСТВА С Q-НЕМЕТРИЧНОСТЬЮ И ПОЛЕ ЯНГА-МИЛЛСА

Продолжая тему трехмерных кватернионных сечений четырехмерного пространства-времени, можно указать еще один замечательный пример связи геометрических характеристик Q-пространств с физическими характеристиками широко обсуждаемого в теории (хотя и гипотетического) калибровочного поля Янга-Миллса.

Кривизна Q-неметричности и напряженность поля Янга-Миллса

Обычно поле Янга-Миллса[101] $A_{B\mu}$ вводится как калибровочное в процедуре локализации преобразований некоторого, например, спинорного поля [92], [93]

$$\psi_a \to U(y^\beta)\psi_a . \qquad (6.3\text{-}1)$$

Если в соответствующем лагранжиане частную производную от ψ_a заменить на «ковариантную»

$$\partial_\beta \to D_\beta \equiv \partial_\beta - gA_\beta \ , \qquad A_\beta \equiv iA_{C\beta}\mathbf{T}_C \ ,$$

где g – действительная константа (параметр модели), $\mathbf{T}_C$ – бесследовые матрицы, генераторы некоторой группы Ли, удовлетворяющие перестановочному соотношению

$$[\mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C] = if_{BCD}\mathbf{T}_D$$

со структурными константами f_{BCD} , то

$$D_\beta U \equiv (\partial_\beta - gA_\beta)U = 0 , \qquad (6.3\text{-}2)$$

и лагранжиан остается инвариантным относительно преобразований (6.3-1). Теория становится замкнутой, если в лагранжиан добавляется слагаемое собственно калибровочного поля

$$L_{ЯМ} \sim F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} , \qquad (6.3\text{-}3)$$

$$F_{\alpha\beta} \equiv F_{C\alpha\beta}\mathbf{T}_C ,$$

напряженность которого $F_B{}^{\mu\nu}$ следующим образом выражается через потенциалы $A_{B\mu}$ и структурные константы

$$F_{C\alpha\beta} = \partial_\alpha A_{C\beta} - \partial_\beta A_{C\alpha} + f_{CDE}\, A_{D\alpha}A_{E\beta} .$$

Вакуумные уравнения калибровочного поля следуют из варьирования действия, построенного из лагранжиана (6.3-3)

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + [A_\alpha, F^{\alpha\beta}] = 0 . \qquad (6.3\text{-}4)$$

В частности, генераторами группы Ли [группы SU(2)], могут являются «мнимые» кватернионные единицы, заданные, например, как бесследовые 2×2-матрицы в специальном представлении (см., например, [94])

$$i\mathbf{T}_B \to \mathbf{q}_{\tilde{k}} = -i\sigma_k \ \ (\sigma_k \text{ – матрицы Паули}),$$

---

[101] Индексы $A, B, C \ldots$ нумеруют генераторы группы Ли, индексы $\mu, \nu, \lambda \ldots$ относятся к голономным координатам четырехмерного пространства-времени, индексы $a, b, c \ldots$ здесь перечисляют поля спинорного мультиплета, а индексы $j, k, m \ldots$, как и прежде, нумеруют векторы репера в касательном Q-пространстве.

тогда $f_{BCD} \to \varepsilon_{knm}$; выражения для потенциала и напряженности калибровочного поля записываются в виде

$$A_{\beta} = g\frac{1}{2}A_{\tilde{k}\,\beta}\mathbf{q}_{\tilde{k}} \ , \tag{6.3-5}$$

$$F_{k\,\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{k\,\beta} - \partial_{\beta} A_{k\,\alpha} + \varepsilon_{kmn} A_{m\,\alpha} A_{n\,\beta} \ . \tag{6.3-6}$$

Стоит заметить, что этот метод введения полей типа Янга-Миллса, общепринятый и весьма изящный, существенно использует эвристическую базу теоретической физики, в первую очередь, постулат экстремума действия и формализм построения функций Лагранжа. Но поскольку в описании полей такого типа применимы кватернионные единицы, можно предположить, что какие-то из вышеприведенных соотношений содержатся также в теории Q-пространств и не исключено, что они имеют геометрические аналоги. Подтвердить состоятельность этого предположения позволяет обращение к очередной пространственно-временной модели с трехмерным кватернионным сечением.

Пусть вначале рассматривается четырехмерное пространство-время, 3D-сечение которого представлено риманово-плоским Q-пространством (первая схема классификации), или эквивалентно – метрическим чисто кватернионным пространством $QS(G \setminus \tilde{R} \setminus S \setminus C \setminus \sigma)$ (вторая схема классификации), где из дифференциальных характеристик отличны от нуля лишь собственная кватернионная связность и гамильтоново кручение. В таком пространстве Q-ковариантная производная от векторов репера (значит, Q-метрики) исчезает

$$\tilde{D}_{\alpha}\mathbf{q}_{k} \equiv (\delta_{mk}\partial_{\alpha} + \omega_{\alpha\,mk})\,\mathbf{q}_{m} = 0 \ .$$

Это соотношение эквивалентно определению собственной Q-связности, с его помощью в главе 2 выражения для $\omega_{\alpha\,mk}$ записаны через производные функций, преобразующих постоянный репер в $\mathbf{q}_{\tilde{m}}$ переменный. В частности, если такое преобразование осуществляется спинорной группой

$$\mathbf{q}_{k} = U(y)\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1}(y) \, ,$$

то

$$\partial_{\alpha}U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1} + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\partial_{\alpha}U^{-1} = \omega_{\alpha kn}U\,\mathbf{q}_{\tilde{n}}U^{-1} \, . \tag{6.3-7}$$

Но каждую «мнимую» кватернионную единицу всегда можно представить в виде тензорного произведения матриц более фундаментальных объектов – собственных функций, имеющих спинорную структуру [см. формулу (2-31) главы 2; здесь выбраны СФ лишь положительной четности]

$$\mathbf{q}_{\tilde{k}} = i(2\psi_{(\tilde{k})}\varphi_{(\tilde{k})} - 1) \, ,$$

поэтому левая часть соотношения (6.3-7) эквивалентно переписывается в виде

$$\frac{1}{2}(\partial_{\alpha}U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}U^{-1} + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\partial_{\alpha}U^{-1}) = (\partial_{\alpha}U\,\psi_{(\tilde{k})})\,\varphi_{(\tilde{k})}U^{-1} + U\,\psi_{(\tilde{k})}\,(\varphi_{(\tilde{k})}\partial_{\alpha}U^{-1}) \, ,$$

весьма напоминающем применение формулы (6.3-1) преобразования спинорных функций. Здесь, однако, представлен чисто математический факт возможности преобразований единиц алгебры, не нарушающих правила ее умножения, но нет речи ни о лагранжианах каких-либо физических полей, ни об их инвариантности.

Итак, форм-инвариантность правила умножения кватернионных единиц относительно преобразований спинорной группы приводит к выражениям, аналогичным тем, что инициируют введение калибровочного поля типа Янга-Миллса. Чтобы определить, как такие поля могут возникнуть в математике кватернионов, потребуется более детально проанализировать соотношение (6.3-7). Его домножение справа на комбинацию $U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}$ со сверткой по $\tilde{k}$ приводит к выражению

$$-3\partial_\alpha U + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\partial_\alpha U^{-1}U\mathbf{q}_{\tilde{k}} = \omega_{\alpha kn}U\,\mathbf{q}_{\tilde{n}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} \qquad (6.3\text{-}8)$$

Это матричное уравнение, вероятно, можно упростить. Обычно при упрощении подобных уравнений ограничиваются преобразованиями с малыми параметрами. Но в главе 2 было показано, что всякая матрица спинорного преобразования представима в виде кватерниона; в данном случае требуется разложение векторной части по базису в специальном представлении, такое разложение всегда возможно

$$U \equiv a + b_k\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,, \qquad U^{-1} = a - b_k\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,, \qquad UU^{-1} = a^2 + b_k\,b_k = 1\,. \qquad (6.3\text{-}9)$$

С использованием соотношений (6.3-9) и правила умножения единиц второе слагаемое левой части (6.3-8) после длинной, но несложной алгебры преобразуется к замечательно простому выражению

$$U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\partial_\alpha U^{-1}U\mathbf{q}_{\tilde{k}} = (a + b_n\mathbf{q}_{\tilde{n}})\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}(\partial_\alpha a - \partial_\alpha b_m\mathbf{q}_{\tilde{m}})(a + b_l\mathbf{q}_{\tilde{l}})\,\mathbf{q}_{\tilde{k}} = \partial_\alpha(a + b_n\mathbf{q}_{\tilde{n}}) = -\partial_\alpha U\,.$$

В сумме в левой части (6.3-8) содержится $-4\partial_\alpha U$, тогда как правая часть преобразуется к виду

$$\omega_{\alpha kn}U\,\mathbf{q}_{\tilde{n}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} = -\varepsilon_{knm}\omega_{\alpha kn}U\,\mathbf{q}_{\tilde{m}}\,.$$

и в целом уравнение (6.3-8) после деления на два и переноса всех членов в одну сторону приобретает вид

$$\partial_\alpha U - \frac{1}{4}\varepsilon_{knm}\omega_{\alpha kn}U\,\mathbf{q}_{\tilde{m}} = 0\,. \qquad (6.3\text{-}10)$$

Если теперь сделать обозначения

$$A_{k\,\alpha} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{knm}\omega_{\alpha kn}\,, \qquad (6.3\text{-}11)$$

$$A_\alpha \equiv \frac{1}{2}A_n\mathbf{q}_{\tilde{n}}\,, \qquad (6.3\text{-}12)$$

то определение (6.3-12) совпадает с определением (6.3-5) (при $g = 1$), а уравнение (6.3-10) оказывается эквивалентным уравнению (6.3-2)

$$U\overleftarrow{D}_\alpha \equiv U(\overleftarrow{\partial}_\alpha - A_\alpha) = 0\,. \qquad (6.3\text{-}13)$$

Выражение для «ковариантной производной» обратной матрицы следует из тождества

$$\partial_\alpha U\,U^{-1} = -U\partial_\alpha U^{-1}\,,$$

тогда, используя формулу (6.3-10) легко подсчитать

$$-\partial_\alpha U^{-1} - \frac{1}{4}\varepsilon_{knm}\omega_{\alpha kn}\,\mathbf{q}_{\tilde{m}}U^{-1} = 0\,, \qquad (6.3\text{-}14)$$

или

$$D_\alpha U^{-1} \equiv (\partial_\alpha + A_\alpha)U^{-1} = 0\,. \qquad (6.3\text{-}15)$$

Направление действия операторов производной не меняет существа дела, ибо ничто не мешает замене $U^{-1} \to U$ и $U \to U^{-1}$, и тогда соотношение (6.3-15) в точности совпадает с соотношением (6.3-2).

В качестве несложного упражнения полезно проверить правильность полученных выражений (6.3-10) и (6.3-14), подставив их в исходную формулу (6.3-7)

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}} U^{-1} + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}} \partial_\alpha U^{-1} = \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon_{mnj}\,\omega_{\alpha\,mn} U\,\mathbf{q}_{\tilde{j}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} U^{-1} - U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,\frac{1}{4}\varepsilon_{mnj}\mathbf{q}_{\tilde{j}} U^{-1} = \\
&= \frac{1}{4}\varepsilon_{mnj}\,\omega_{\alpha\,mn} U(\mathbf{q}_{\tilde{j}}\mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}\mathbf{q}_{\tilde{j}})U^{-1} = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnj}\varepsilon_{jkl}\,\omega_{\alpha\,mn}\,U\,\mathbf{q}_{\tilde{l}}\,U^{-1} = \\
&= \frac{1}{2}(\delta_{mk}\delta_{nl} - \delta_{ml}\delta_{nk})\,\omega_{\alpha\,mn}\,U\,\mathbf{q}_{\tilde{l}}\,U^{-1} = \\
&= \omega_{\alpha\,kl} U\,\mathbf{q}_{\tilde{l}} U^{-1} = \omega_{\alpha\,kl}\,\mathbf{q}_{\tilde{l}}\,,
\end{aligned}$$

что и требовалось показать; формулы «ковариантных производных» верны. Символически оператор действия «ковариантных производных» (6.3-13), (6.3-15) на единичный Q-вектор можно записать так

$$D_\alpha \mathbf{q}_k \to (D_\alpha U)\,\mathbf{q}_{\tilde{k}} \partial_\alpha U^{-1} + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,(D_\alpha U^{-1}) = 0\,. \qquad (6.3\text{-}16)$$

Таким образом, имеет место любопытный факт: из форм-инвариантности правила кватернионного умножения следует «ковариантное постоянство» матрицы спинорного преобразования векторных Q-единиц. При этом роль связности в «ковариантной производной» (то есть роль потенциала некоторого поля Янга-Миллса) играет свернутая по антисимметричным индексам дискриминантным тензором собственная Q-связность, которая, кстати, легко выражается из соотношения (6.3-11)

$$\omega_{\alpha kn} = \varepsilon_{mkn} A_{m\alpha}\,. \qquad (6.3\text{-}17)$$

Теперь с помощью формулы (6.3-17) можно установить, как через собственную Q-связность выражается напряженность (6.3-6), свернутая для удобства с дискриминантным тензором

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{kmn} F_{k\,\alpha\beta} &= \varepsilon_{kmn}(\partial_\alpha A_{k\,\beta} - \partial_\beta A_{k\,\alpha}) + \varepsilon_{kmn}\varepsilon_{mlj} A_{l\,\alpha} A_{j\,\beta} = \\
&= \partial_\alpha \omega_{\beta\,mn} - \partial_\beta \omega_{\alpha\,mn} + A_{m\,\alpha} A_{n\,\beta} - A_{m\beta} A_{n\alpha}\,. \qquad (6.3\text{-}18)
\end{aligned}$$

Добавив справа исчезающую сумму

$$-\delta_{mn} A_{j\,\alpha} A_{j\,\beta} + \delta_{mn} A_{j\beta} A_{j\alpha} = 0\,,$$

все квадратичные члены в правой части можно тождественно представить в виде

$$\begin{aligned}
&A_{m\,\alpha} A_{n\,\beta} - A_{m\beta} A_{n\,\alpha} - \delta_{mn} A_{j\,\alpha} A_{j\,\beta} + \delta_{mn} A_{j\beta} A_{j\alpha} = \\
&= (\delta_{mp}\delta_{qn} - \delta_{mn}\delta_{qp})(A_{p\,\alpha} A_{q\,\beta} - A_{p\beta} A_{q\,\alpha}) = \\
&= \varepsilon_{kmq}\varepsilon_{kpn}(A_{p\,\alpha} A_{q\,\beta} - A_{p\beta} A_{q\,\alpha}) = \\
&= -\omega_{\alpha\,kn}\,\omega_{\beta\,km} + \omega_{\beta\,kn} A_{\alpha\,km}\,.
\end{aligned}$$

Подстановка последнего соотношения в формулу (6.3-18) и введение в ней нового обозначения

$$R_{mn\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{kmn} F_{k\,\alpha\beta}$$

приводят к хорошо знакомому выражению

$$R_{mn\alpha\beta} = \partial_\alpha \omega_{\beta\,mn} - \partial_\beta \omega_{\alpha\,mn} + \omega_{\alpha\,nk}\,\omega_{\beta\,km} - \omega_{\beta\,nk}\,\omega_{\alpha\,km}\,, \qquad (6.3\text{-}19)$$

это есть не что иное, как тензор кривизны Q-пространства, построенный из собственной Q-связности, которая зависит от четырехмерных координат. Но как показано в главе 3, в силу метричности связности все компоненты тензора (6.3-14) равны нулю, то есть поле Янга-Миллса, построенное в Q-пространстве $QS(G \setminus \widetilde{R} \setminus S \setminus C \setminus \sigma)$, имеет ненулевой потенциал, но исчезающую напряженность.

Картина меняется в «чисто кватернионном пространстве» $QS(G \setminus \widetilde{R} \setminus S \setminus C)$ (вторая схема классификации – «по аффинным характеристикам»). Среди базовых дифференциальных объектов такого трехмерного Q-пространства – собственная Q-связность, Q-неметричность, а также соответствующая кривизна. При этом предполагается, что составляющие Q-связности могут возникать в результате переноса не только по пространственным, но и временным направлениям пространства-времени, и в целом могут зависеть от четырехмерных координат. Таким образом, отличны от нуля только компоненты связности

$$\Omega_{\beta\,kn}(y^\alpha) = \omega_{\beta\,kn} + \sigma_{\beta\,kn}\,, \qquad (6.3\text{-}20)$$

представляющие собой сумму компонент собственной Q-связности и кватернионной неметричности; последняя, вообще говоря, может содержать как чисто кватернионный член, так и обобщенные коэффициенты вращения Риччи, возникающие в формализме касательного пространства как следствие свойств «внутреннего» пространства аффинной связности и перехода к неголономным координатам (см. главу 3)

$$\sigma_{\beta\,kn} = \hat{\sigma}_{\beta\,kn} + \Phi_{\beta\,kn}\,.$$

Стоит напомнить, что Q-ковариантная производная переменного единичного Q-вектора со связностью (6.3-20) не исчезает, ее результатом является именно Q-неметричность

$$\hat{D}_\alpha \mathbf{q}_k \equiv (\delta_{mk}\partial_\alpha + \Omega_{\alpha\,mk})\mathbf{q}_m = \sigma_{\alpha\,mk}\,\mathbf{q}_k\,. \qquad (6.3\text{-}21)$$

Подобно тому, как это сделано в предыдущем случае Q-пространства $QS(G \setminus \widetilde{R} \setminus S \setminus C \setminus \sigma)$, в «чисто кватернионном пространстве» для спинорных матриц преобразования Q-репера можно определить «ковариантные производные», внешне сходные с определениями (6.3-13), (6.3-15)

$$U\hat{\overleftarrow{D}}_\alpha \equiv \hat{U}(\overleftarrow{\partial}_\alpha - \hat{A}_\alpha)\,, \qquad \hat{D}_\alpha U^{-1} \equiv (\partial_\alpha + \hat{A}_\alpha)U\,, \qquad (6.3\text{-}22)$$

но с той разницей, что «калибровочное поле» в них построено из связности (6.3-20)

$$\hat{A}_{k\,\alpha} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{knm}\Omega_{\alpha kn}\,, \qquad \hat{A}_\alpha \equiv \frac{1}{2}\hat{A}_n \mathbf{q}_{\tilde{n}}\,. \qquad (6.3\text{-}23)$$

По аналогии с процедурой (6.3-16) нетрудно вычислить результат действия «ковариантных производных» (6.3-22) на единичный Q-вектор

$$\hat{D}_\alpha \mathbf{q}_k \to (\hat{D}_\alpha U)\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,\partial_\alpha U^{-1} + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}\,(\hat{D}_\alpha U^{-1}) =$$

$$= (U\overleftarrow{D}_\alpha - \frac{1}{4}\varepsilon_{jnm}\Omega_{\alpha\, nm}U\mathbf{q}_{\tilde{j}}\,\mathbf{q}_{\tilde{k}})U^{-1} + U\,\mathbf{q}_{\tilde{k}}(D_\alpha U^{-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_{jnm}\Omega_{\alpha\, nm}\mathbf{q}_{\tilde{j}}U^{-1}).$$

В силу (6.3-13) и (6.3-15)

$$U\overleftarrow{D}_\alpha = D_\alpha U^{-1} = 0\,,$$

поэтому

$$\hat{D}_\alpha \mathbf{q}_k \to \frac{1}{2}\varepsilon_{jnm}\sigma_{\alpha\, nm}U\varepsilon_{jkl}\mathbf{q}_{\tilde{l}}\,U^{-1} = \sigma_{\alpha\, kl}\,U\,\mathbf{q}_{\tilde{l}}\,U^{-1} = \sigma_{\alpha\, kl}\,\mathbf{q}_l\,,$$

то есть «калибровочная ковариантная» производная от переменной мнимой единицы имеет результатом Q-неметричность, что вполне согласуется с геометрическим фактом (6.3-21), который, в свою очередь, с учетом определения собственной Q-связности, является тождеством.

Тензор кривизны в таком пространстве удобно вычислять с использовнаием дифференциальных форм. Если в первом уравнении структуры найдены или заданы компоненты 1-формы Q-связности

$$\Omega_{kn} = \Omega_{\beta\, kn}dy^\beta\,,$$

то из второго уравнения структуры

$$\frac{1}{2}\hat{R}_{kn\alpha\beta}dy^\alpha \wedge dy^\beta = d\Omega_{kn} + \Omega_{km} \wedge \Omega_{mn}\,,$$

определяются компоненты тензора кривизны

$$\hat{R}_{kn\alpha\beta} = \partial_\alpha \Omega_{\beta\, kn} - \partial_\beta \Omega_{\alpha\, kn} + \Omega_{\alpha\, km}\Omega_{\beta\, mn} - \Omega_{\alpha\, nm}\Omega_{\beta\, mk} \qquad (6.3\text{-}24)$$

– вполне аналогично формуле (6.3-19), так что можно проделать процедуру, обратную той, что осуществлена уравнениями (6.3-18), (6.3-19). Антисимметрия по индексам касательного пространства позволяет часть тензора (6.3-24), лежащую в Q-сечении представить в виде трехмерного аксиального вектора, так что полный тензор кривизны преобразуется к виду

$$\hat{F}_{m\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{knm}\hat{R}_{kn\alpha\beta}\,. \qquad (6.3\text{-}25)$$

Теперь, используя соотношения (6.3-23), легко переписать определение (6.3-25) в виде

$$\hat{F}_{m\alpha\beta} = \partial_\alpha \hat{A}_{m\,\beta} - \partial_\beta \hat{A}_{m\,\alpha} + \varepsilon_{knm}\hat{A}_{k\,\alpha}\hat{A}_{n\,\beta}\,; \qquad (6.3\text{-}26)$$

это точно совпадает с определением (6.3-6). Поскольку в пространстве с Q-неметричностью компоненты тензора кривизны отличны от нуля, не исчезают и компоненты величины (6.3-26), имеющей форму напряженности поля Янга-Миллса.

Если потенциалы поля строятся из чисто кватернионной неметричности

$$\hat{A}_{k\,\alpha} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{knm}\sigma_{\alpha kn}\,,$$

то есть вводятся непосредственно как самостоятельные геометрические объекты, то последующая теория (включающая построение функции Лагранжа и вывод уравнений) формально эквивалентна теории Янга-Миллса. В другом частном случае, когда объект Q-неметричности состоит только из коэффициентов вращения Риччи риманова пространства-времени (но с указанными выше ограничениями на компоненты), потенциал и напряженность «калибровочного поля»

$$\hat{A}_{k\,\alpha} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{knm}\Phi_{\alpha kn}\,, \tag{6.3-27}$$

$$\varepsilon_{knm}\hat{F}_{m\alpha\beta} = \hat{R}_{kn\alpha\beta} = \partial_\alpha \Phi_{\beta\, kn} - \partial_\beta \Phi_{\alpha\, kn} + \Phi_{\alpha\, km}\Phi_{\beta\, mn} - \Phi_{\alpha\, nm}\Phi_{\beta\, mk}\,, \tag{6.3-28}$$

с позиций общей теории относительности, являют собой объекты «гравитационной» природы. Интересно, что в этом варианте напряженность поля – кривизна – имеет суперпотенциал – метрику пространства-времени, из которой сначала строятся компоненты потенциала – римановой связности (символов Кристоффеля и коэффициентов вращения Риччи).

Полевые уравнения (6.3-4), однако, в отличие от уравнений гравитации, в геометрических соотношениях не содержатся. Действительно, если левая часть уравнений ОТО представлена консервативным тензором Эйнштейна, следующим из тождеств Бьянки, то для уравнений поля Янга-Миллса анализ этих тождеств неконструктивен. Это, кстати, легко показать: достаточно из вторых уравнений структуры выразить внешний дифференциал связности

$$d\Omega_{kn} = \hat{R}_{kn} - \Omega_{km} \wedge \Omega_{mn}\,;$$

внешний дифференциал от этой точной формы есть тождественный ноль

$$dd\Omega_{kn} = d\hat{R}_{kn} - d\Omega_{km} \wedge \Omega_{mn} + d\Omega_{km} \wedge \Omega_{mn} = 0\,.$$

Замена в последнем выражении производных 1-форм связности на 2-форму кривизны (из тех же уравнений структуры) приводит к тождествам Бьянки

$$d\hat{R}_{kn} + R_{mn} \wedge \Omega_{km} + R_{km} \wedge \Omega_{nm} = 0\,,$$

или в координатном представлении (греческие инедксы в квадратных скобках антисимметризованы)

$$\partial_{[\gamma}\hat{R}_{kn\alpha\beta]} + R_{mn[\alpha\beta}\Omega_{\gamma]km} + R_{km[\alpha\beta}\Omega_{\gamma]nm} = 0\,.$$

В ОТО последовательные свертки по индексам k,α и n,γ имеют следствием ковариантное сохранение тензора Эйнштейна. В случае же поля Янга-Миллса векторные (групповые) индексы зарезервированы для потенциала и напряженности, которые появляются в тождестве при надлежащей свертке с тензором Леви-Чивиты и применении соотношений (6.3-11), (6.3-25)

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{knl}(\partial_{[\gamma}\hat{R}_{kn\alpha\beta]} + \varepsilon R_{mn[\alpha\beta}\Omega_{\gamma]km} + R_{km[\alpha\beta}\Omega_{\gamma]nm}) =$$

$$= \partial_{[\gamma}\hat{F}_{l\,\alpha\beta]} + \varepsilon_{knl}(\varepsilon_{mnj}\varepsilon_{kmp}\hat{F}_{j[\alpha\beta}\hat{A}_{p\,\gamma]} + \varepsilon_{kmj}\varepsilon_{nmp}\hat{F}_{j[\alpha\beta}\hat{A}_{p\,\gamma]}) =$$

$$= \partial_{[\gamma}\hat{F}_{l\,\alpha\beta]} + 2\varepsilon_{knl}\hat{F}_{k[\alpha\beta}\hat{A}_{n\,\gamma]} = 0\,.$$

Последующая свертка по индексам α,γ (для получения дивергенции тензора напряженности, входящей в уравнения поля) в силу антисимметрии

$$\hat{F}_{l\,\alpha\beta} = -\hat{F}_{k\,\beta\alpha}$$

приводит просто к исчезновению левой части. Итак, для вывода уравнений поля Янга-Миллса требуется стандартная процедура вариации функционала действия. Но если для уравнений Эйнштейна, как, видимо, впервые показано Гильбертом, функцией Лагранжа является простейший (и единственный) линейный по кривизне инвариант – скалярная кривизна, то для уравнений поля Янга-Миллса такой функцией является простейший квадратичный по тензору кривизны инвариант рассматриваемого пространства

$$L_{ЯМ} \sim \hat{F}_k^{\ \alpha\beta}\hat{F}_{k\,\alpha\beta} = \frac{1}{4}\varepsilon_{kmn}\varepsilon_{kjl}\hat{R}_{mn}^{\ \ \alpha\beta}\hat{R}_{jl\alpha\beta} = \frac{1}{2}\hat{R}_{mn}^{\ \ \alpha\beta}\hat{R}_{mn\alpha\beta}\,. \qquad (6.3\text{-}29)$$

Теорий гравитации с лагранжианом в виде инварианта типа (6.3-29), известно достаточно много (см., например, книгу [95], а также обзор [111]). Если при этом отличны от нуля лишь компоненты связности и кривизны, определенные формулами (6.3-27) и (6.3-28), то уравнения таких теорий и их решения формально не отличимы от уравнений и решений теории Янга-Миллса с калибровочной группой SU(2). Не исключается, конечно, возможность и смешанного варианта задания геометрических потенциалов «поля Янга-Миллса»: неметричности чисто кватернионной и порожденной дифференциальными характеристиками «внутреннего» пространства аффинной связности.

Завершая этот параграф, стоит напомнить, что правило умножения кватернионных единиц, как показано в главе 2, форм-инвариантно относительно преобразований обобщенной спинорной группы SL(2C). Это обстоятельство открывает возможность построения более общей «теории Янга-Миллса» в таких кватернионных пространствах, Q-неметричность которых имеет комплексные компоненты. Однако развитие подобной теории требует специального исследования, выходящего за рамки данной работы.

6.4. ФУНКЦИИ-КВАТЕРНИОНЫ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В предыдущем параграфе показано, что базовые величины поля Янга-Милса – потенциал и напряженность – естественным образом присутствуют в геометрии соответствующих Q-пространств, но уравнения поля выводятся варьированием действия с лагранжианом, представленным простейшим квадратичным по кривизне инвариантом. Однако в теории кватернионов достаточно широко известен пример возникновения конструкции, эквивалентной уравнениям физического поля, из совсем иных соображений, нежели принцип экстремума действия. Речь идет о связи модифицированных уравнений Коши-Римана и вакуумных уравнениях Максвелла. Эта связь прослеживается при изучении элементов теории функции кватернионного переменного. Первые шаги в разработке такой теории сделаны в работах Р.Фютера [17].[102]

Кватернионные условия Фютера

Если ранее в данной работе кватернионные объекты – характеристики Q-пространств – рассматривались как скалярно-векторные функции действительных переменных, то здесь, по аналогии с теорией функций комплексного переменного, делается попытка ввести понятие функции-кватерниона $G(y)$ с кватернионной же переменной в качестве аргумента

$$G = G_0(y) + G_n(y)\mathbf{q}_n\,, \qquad y \equiv y_0 - y_k\mathbf{q}_k\,; \qquad (6.4\text{-}1)$$

все кватернионные единицы здесь полагаются постоянными. Обобщая известные понятия, можно считать функцию $G(y)$ непрерывной и достаточно гладкой и определить для нее понятие предела, а затем – производной по аргументу. В силу некоммутативности умножения кватернионов следует определить левую и правую производную

$$\vec{d}_y G \equiv \frac{\partial G}{\partial y_0} + \mathbf{q}_n\frac{\partial G}{\partial y_n}\,, \qquad G\overleftarrow{d}_y \equiv \frac{\partial G}{\partial y_0} + \frac{\partial G}{\partial y_n}\mathbf{q}_n\,. \qquad (6.4\text{-}2)$$

[102] Есть также ссылки на работы в тот же период других авторов [96], [97].

Можно показать, что, как и в случае функции комплексного переменного, производные (6.4-2) определяются неоднозначно, и для устранения этого недостатка требуется использование дополнительных условий типа известных условий Коши-Римана

$$\vec{d}_{\bar{y}} G = 0 , \tag{6.4-3}$$

где производная берется по сопряженному аргументу

$$\bar{y} \equiv y_0 + y_k \mathbf{q}_k ,$$

$$\vec{d}_{\bar{y}} G = \frac{\partial G}{\partial y_0} - \mathbf{q}_n \frac{\partial G}{\partial y_n} = 0 .$$

Теперь можно обратиться к физическим приложениям.

Пусть вначале рассматривается четырехмерное пространство-время, трехмерным сечением которого является евклидово Q-пространство $QS(G \setminus \sigma \setminus S \setminus C \setminus R \setminus T)$; при этом будет предполагаться, что компоненты всех величин могут принимать комплексные значения.[103] Далее, пусть в таком пространстве определена дифференцируемая слева Q-функция

$$A(u) \equiv i\varphi + A_k \mathbf{q}_k , \tag{6.4-4}$$

где φ, A_k действительные скалярная и векторная функции (потенциалы электромагнитного поля) формально заданного аргумента

$$u \equiv -ict - x_k \mathbf{q}_k \tag{6.4-5}$$

(x_k , t – координата точки и время ее наблюдения). Соответствующий оператор Q-дифференцирования и ему Q-сопряженный записываются в виде

$$d_u \equiv \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q}_n \frac{\partial}{\partial x_n} , \quad d_{\bar{u}} \equiv \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{q}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Тогда, согласно определению (6.4-2) левая производная функции (6.4-4) есть

$$d_{\bar{u}} A \equiv F(u) = i\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{q}_n \frac{\partial A}{\partial x_n} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + i\,\mathbf{q}_k \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + i\,\mathbf{q}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \mathbf{q}_n \mathbf{q}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_n} =$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial A_k}{\partial x_k} + \mathbf{q}_k \left(i\frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + i\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \varepsilon_{nmk} \frac{\partial A_m}{\partial x_n} \right). \tag{6.4-6}$$

Скалярная компонента F есть ноль, что соответствует калибровке Лоренца

$$\frac{1}{c}\dot{\varphi} + \nabla_k A_k = 0 , \tag{6.4-7}$$

а векторная компонента определяет напряженности поля

$$E_k \equiv -\frac{1}{c}\dot{A}_k - \nabla_k \varphi , \qquad H_k \equiv \varepsilon_{nmk} \nabla_n A_m . \tag{6.4-8}$$

В целом соотношение (6.4-6) кратко записывается в виде

$$F(u) = (H_k - iE_k)\,\mathbf{q}_k .$$

---

[103] Так иногда удобней записывать объекты псевдоевклидова пространства с сигнатурой (+ - - -); примером является данное выше формальное определение «физической» кватернионной тетрады, использованное для автоматического учета собственной связности в первых уравнениях структуры [см. формулу (6.2-1)]

Если Q-функция F дифференцируема, то согласно (6.4-3)

$$d_{\bar{u}}F = 0\,,$$

или

$$d_{\bar{u}}F = \frac{i}{c}\frac{\partial F}{\partial t} - \mathbf{q}_n \frac{\partial F}{\partial x_n} =$$

$$= i\nabla_n E_n - \nabla_n H_n - \mathbf{q}_k \left[i\left(\frac{1}{c}\dot{H}_k + \varepsilon_{mnk}\nabla_m E_n\right) + \frac{1}{c}\dot{E}_k - \varepsilon_{mnk}\nabla_m H_n \right] = 0\,.$$

Из последнего соотношения выделяются скалярные и векторные, действительные и мнимые компоненты

$$\nabla_n E_n = 0\,, \qquad \frac{1}{c}\dot{E}_k - \varepsilon_{mnk}\nabla_m H_n = 0\,, \tag{6.4-9}$$

$$\nabla_n H_n = 0\,, \qquad \frac{1}{c}\dot{H}_k + \varepsilon_{mnk}\nabla_m E_n = 0\,, \tag{6.4-10}$$

форма которых точно повторяет вид вакуумных уравнений Максвелла. Хорошо известно (и легко проверить), что в силу определений (6.4-8) пара уравнений (6.4-10) представляет собой точные тождества. Интересно, что в данном случае возникновение этих уравнений никак не связано с физико-математической эмпирикой, в том числе с процедурой варьирования действия, но есть результат анализа чисто математических соотношений. Этот факт еще раз заставляет задуматься над глубиной содержания математики кватернионов.

В то же время, понятно, что такого рода вывод уравнений Максвелла – хотя и весьма любопытный – имеет чисто методический характер, тем более что со стандартных физических позиций он содержит существенные недостатки, некоторые нелишне перечислить. Первый недостаток: уравнения не содержат источников, которые появлялись бы столь же «автоматически». Второй недостаток: неясным остается, смысл и следствия условия дифференцируемости Q-функции-потенциала (6.4-4), о них просто умалчивается. Третий недостаток: если сами уравнения (6.4-9), (6.4-10) обеспечены естественной лоренц-инвариантностью в смысле группы SO(3,C), поскольку скалярные и векторные их части, а в них действительные и мнимые по отдельности приравниваются нулю, то ни Q-функция потенциал (6.4-4), ни аргумент (6.4-5) как «корень квадратный» из интервала

$$u^2 = u\bar{u} = x_k x_k - c_2 t^2\,,$$

такой инвариантностью, конечно, не обладают. Наконец, наличие правой и левой производных Q-функции лишает приведенного метода убедительной однозначности, хотя именно в приведенной последовательности производных

$$d_{\bar{u}} d_u A = 0 \tag{6.4-11}$$

уравнения получаются «правильными». Некоторые исследователи, не удовлетворенные сложившейся ситуацией, продолжают развивать это «классическое» направление (см., например, [98]); однако существуют и иные возможности.

Шестимерный аналог уравнений электродинамики[104]

Можно сделать попытку поиска некоторой системы уравнений, аналогичной (6.4-11), но с $SO(3C)$-инвариантными исходными характеристиками. Поскольку такой форминвариантностью обладают все без исключения Q-векторные величины, естественным вари-

[104] Основные результаты данного раздела опубликованы в работе [132], [133].

антом решения проблемы представляется переход непосредственно к модели 3-мерного комплексного (6-мерного действительного) евклидова Q-пространства, рассмотренного в главе 5 в качестве базы кватернионной теории относительности. По существу, такое пространство ничем не отличается от рассмотренного в предыдущем разделе пространства $QS(G \setminus \sigma \setminus S \setminus C \setminus R \setminus T)$, но теперь оно не является сечением четырехмерного пространства-времени, ортогональным временной координате, но включает в себя изменение временного параметра как векторную величину. Алгебраически это означает отказ от скалярных компонент и введение мнимого векторного слагаемого в функцию потенциала

$$\Lambda(z) \equiv (i\alpha_k + \beta_k)\mathbf{q}_k \tag{6.4-12}$$

и в ее формально задаваемый аргумент

$$z \equiv (i t_k - x_k)\mathbf{q}_k\,; \tag{6.4-13}$$

здесь α_k, β_k, t_k, x_k – действительные величины, обозначение фундаментальной скорости для упрощения записи в дальнейшем опускается. Понятно, что объекты (6.4-12), (6.4-13) сохраняют форму при всех допустимых преобразованиях Q-триады.

С геометрической точки зрения, развиваемый подход означает, что в комплексном трехмерном (или шестимерном) пространстве параллельно существуют пары триад

$$\mathbf{q}_k\ ,\ \ \mathbf{p}_k = -i\,\mathbf{q}_k\,,$$

вдоль которых можно откладывать два набора не зависящих друг от друга координат (или компонент геометрических объектов).[105] Сопряженные трехмерные пространства

$$Q_3 \ni \{\mathbf{q}_k, x_k\}\,,\ \ P_3 \ni \{\mathbf{p}_k, t_k\}$$

равноправны и связаны между собой в том смысле, что любой репер $\mathbf{q}_k$ осуществляет те же движения, что и его комплексное отражение $\mathbf{p}_k$. При таком условном делении шестимерного пространства на «действительную» Q_3 и «мнимую» P_3 части упрощается геометрическая интерпретация квадрата интервала

$$z^2 = (i t_k + x_k)(i t_n + x_n)\,\mathbf{q}_k \overline{\mathbf{q}}_n = x^2 - t^2 + 2i\,t_k x_k\,. \tag{6.4-14}$$

Считая, что $\operatorname{Re} z^2 \in Q_3$, $\operatorname{Im} z^2 \in P_3$, можно заключить, что квадрат интервала (6.4-14), имеющий в пространстве Q_3 стандартный вид, в P_3 «виден» на изотропной гиперповерхности. Если с помощью преобразования

$$t_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_k - t'_k)\,, \qquad x_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'_k + t'_k)$$

со стороны 3D-мира Q_3 выйти на «световой конус», то оттуда квадрат интервала в 3D-мире P_3 «выглядит» стандартным образом

$$z'^2 = 2x'_k t'_k + i\,(x'^2 - t'^2)\,.$$

Если же посредством комплексного преобразования прямо перейти из мира Q_3 в мир P_3

$$t_k = -ix''_k\,, \qquad x_k = it''_k\,,$$

[105] Здесь рассматриваются Q-пространства более общего вида, нежели в главе 5, поскольку на бикватернионы типа (6.4-10), (6.4-11) не накладываются ограничение определимости их нормы, как это сделано при формулировке кватернионной теории относительности, совместимой со стандартами теории Эйнштейна.

то исходная форма квадрата интервала остается неизменной

$$z''^2 = x''^2 - t''^2 + 2i\, t''_k x''_k \,.$$

Здесь стоит напомнить, что попытки построения симметричных шестимерных теорий уже осуществлялись рядом авторов [62] – [64], но во всех таких случаях постулировалась лишь действительная часть квадрата интервала (6.4-14); использование не физической, а математической (в данном случае – кватернионной) эвристики, как видно, приводит к более сложному выражению. Переход от 6D-модели к известным соотношениям специальной теории относительности может осуществляться на основе предположения о параллельном смещении времени для всех пространственных точек [132]. По существу, эта гипотеза предполагает вырождение трехмерного пространства P_3 в одномерное

$$\mathbf{p}_k \to i e_k\,, \qquad t_k \to e_k t\,, \qquad e_k e_k = 1\,; \tag{6.4-15}$$

при этом «линейный» интервал (6.4-14) приобретает форму (6.4-5), а выражение для квадрата длины имеет стандартный вид. Если, основываясь на сегодняшних представлениях, считать, что макромир четырехмерен, то шестимерную модель, по-видимому, целесообразно связать с гипотетической структурой микромира. Тогда можно предположить, что катастрофический разрыв топологии и алгебры пространства P_3 (P-катастрофа) происходит на некотором масштабе, определяющем нижнюю пространственно-временную границу применения известных законов физики. Фундаментальные законы макромира – законы электродинамики – на языке кватернионов чрезвычайно просто описывается уравнениями (6.4-11). Если, согласно высказанной гипотезе, сделать шаг «вглубь» пространства-времени, то переход зоны P-катастрофы (детали которой здесь пока не затрагиваются) описывается действиями, обратными процедуре (6.4-15). При этом предполагается, что уравнения поля имеют прежнюю форму (6.4-11)

$$d_{\bar z} d_z \Lambda = 0\,, \tag{6.4-16}$$

где оператор производной и ему Q-сопряженный имеют вид, соответствующий аргументу (6.4-13)

$$d_z \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \right)\mathbf{q}_n\,, \qquad d_{\bar z} \equiv -\left(i\frac{\partial}{\partial t_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \right)\mathbf{q}_n\,. \tag{6.4-17}$$

Как и прежде, сначала удобно определить напряженности «электрического» и «магнитного» полей

$$F \equiv d_z \Lambda = \left(i\frac{\partial}{\partial t_n} + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)\mathbf{q}_n (i\alpha_k + \beta_k)\,\mathbf{q}_k = (iM_k + N_k)\,\mathbf{q}_k\,, \tag{6.4-18}$$

где

$$M_k \equiv -\varepsilon_{knm}\left(\frac{\partial \beta_m}{\partial t_n} + \frac{\partial \alpha_m}{\partial x_n} \right), \tag{6.4-19}$$

$$N_k \equiv \varepsilon_{knm}\left(-\frac{\partial \alpha_m}{\partial t_n} + \frac{\partial \beta_m}{\partial x_n} \right); \tag{6.4-20}$$

при этом скалярная часть бикватерниона (6.4-18) приравнивается нулю

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t_k} - \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} = 0\,, \qquad \frac{\partial \beta_k}{\partial t_k} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} = 0\,, \tag{6.4-21}$$

поскольку она являет собой аналог калибровки Лоренца. Действительно, выражения напряженностей (6.4-19), (6.4-20) не изменяются при градиентном преобразовании потенциалов

$$\alpha_k' = \alpha_k + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial\psi}{\partial t_k}, \qquad \beta_k' = \beta_k + \frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{\partial\varphi}{\partial t_k},$$

φ, ψ – скалярные функции. Подстановка последних выражений в условия (6.4-21) приводит к системе уравнений для функций φ, ψ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial_k}\right)\varphi - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial t_k \partial x_k} = 0, \tag{6.4-22}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial_k}\right)\psi + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_k \partial x_k} = 0, \tag{6.4-23}$$

очевидно имеющей решения (например, любые линейные комбинации аргументов t_k, x_k).

Последующая подстановка определений (6.4-20), (6.4-21) в уравнение (6.4-16)

$$d_{\bar{z}} d_z \Lambda = d_{\bar{z}} F = 0$$

приводит к весьма симметричной системе равенств

$$\frac{\partial N_k}{\partial t_k} - \frac{\partial M_k}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial M_k}{\partial t_k} + \frac{\partial N_k}{\partial x_k} = 0, \tag{6.4-24}$$

$$\varepsilon_{knm}\left(\frac{\partial N_m}{\partial t_n} - \frac{\partial M_m}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad \varepsilon_{knm}\left(\frac{\partial M_m}{\partial t_n} + \frac{\partial N_m}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{6.4-25}$$

первая пара которых (6.4-24), как несложно проверить, представляет собой точные тождества в силу структуры определений (6.4-22), (6.4-23). Подстановка последних во вторую пару (6.4-25) с учетом условий калибровки (6.4-21) приводит к связанной системе линейных уравнений для потенциалов

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)\alpha_n - 2\frac{\partial^2\beta_n}{\partial t_k \partial x_k} = 0, \tag{6.4-26}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)\beta_n + 2\frac{\partial^2\alpha_n}{\partial t_k \partial x_k} = 0. \tag{6.4-27}$$

Уравнения (6.4-24), (6.4-25) с определением напряженностей (6.4-22), (6.4-23) или эквивалентные им уравнения (6.4-26), (6.4-27) представляют собой искомые уравнения «шестимерной электродинамики».

Принцип соответствия 6D и 4D уравнений

Несмотря на существенное отличие структуры уравнений 6D-аналога уравнений электродинамика от структуры уравнений Максвелла, несложно продемонстрировать, что эти две различные группы уравнений удовлетворяют определенному принципу соответствия. А именно, если считать, что шестимерные уравнения (6.4-26), (6.4-27) действут на микроскопических масштабах, то переход через барьер P-катастрофы, должен приводить к вакуумным уравнениям Максвелла. Пусть такой переход описывается заменой типа (6.4-15)

$$t_k \to e_k t, \tag{6.4-28}$$

где e_k – произвольный постоянный вектор, задающий направление времени (в частности, он может быть единичным $e_k e_k = 1$); пространственные векторы полагаются ортогональными направлению времени e_k. Анализ перехода будет проводиться на трех уровнях: условий калибровки, определений напряженности и уравнений поля.

1. Принцип соответствия для условий калибровки

При переходе (6.4-28) условия калибровки (6.4-21) принимают вид

$$e_k \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} - \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} = 0, \qquad e_k \frac{\partial \beta_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_k} = 0 . \tag{6.4-29}$$

Если следующим образом определить векторный и скалярный потенциалы

$$\alpha_k \equiv A_k, \qquad \beta_k \equiv e_k \varphi, \tag{6.4-30}$$

то первое равенство (6.4-29) тождественно обращается в ноль в силу ортогональности пространственных векторов направлению времени

$$e_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = 0,$$

а второе равенство приобретает точный вид калибровки Лоренца

$$e_k e_k \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \dot{\varphi} + div \vec{A} = 0 .$$

2. Принцип соответствия для определения напряженностей.

С учетом соотношений (6.4-30) напряженность (6.4-19) приобретает вид

$$M_k \to -H_k \equiv -\varepsilon_{knm} \left(e_m e_n \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial A_m}{\partial x_n} \right),$$

то есть 6D-напряженность M_k сводится к 4D-напряженности магнитного поля

$$M_k \to -H_m = -\varepsilon_{knm} \frac{\partial A_m}{\partial x_n}, \qquad \text{или} \qquad \vec{H} = rot \vec{A} . \tag{6.4-31}$$

Анализируя переход (6.4-28), напряженность N_k удобно представить в виде

$$N_k \to \varepsilon_{knm} e_n E_m, \tag{6.4-32}$$

тогда определение (6.4-20) преобразуется следующим образом

$$N_k \to \varepsilon_{knm} e_n E_k = \varepsilon_{knm} \left(-e_n \frac{\partial A_m}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} e_m \right),$$

откуда следует

$$e_{[n} E_{m]} = -e_{[n} \frac{\partial A_{m]}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{[n}} e_{m]};$$

свертка последнего соотношения с вектором e_n приводит к точному выражению для напряженности электрического поля

$$E_m = -\frac{\partial A_m}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}, \qquad \text{или} \qquad \vec{E} = -\dot{\vec{A}} - grad\, \varphi .$$

3. Принцип соответствия для уравнений поля

Первое динамическое уравнение из пары (6.4-24) – точное тождество – при переходе (6.4-28) с учетом определений (6.4-31), (6.4-32) преобразуется к известному виду (также тождеству)

$$\varepsilon_{knm} e_n e_k \frac{\partial E_m}{\partial t} + \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{или} \qquad div\,\vec{H} = 0,$$

так как первое слагаемое есть ноль в силу свертки симметричного и антисимметричного по индексам объектов.

Второе уравнение пары (6.4-24) – тождество – при переходе принимает вид

$$-e_k \left(\frac{\partial H_k}{\partial t} + \varepsilon_{knm} \frac{\partial E_m}{\partial x_n} \right) = 0, \quad \text{или} \qquad \dot{\vec{H}} + rot\,\vec{E} = 0,$$

в силу произвольности компонент вектора e_n; последнее уравнение – одно из уравнений Максвелла – также является тождеством.

Первое уравнение из пары (6.4-25) – уже не тождество – при переходе (6.4-28) преобразуется так

$$\varepsilon_{knm} \left(\varepsilon_{mlj} e_l e_n \frac{\partial E_j}{\partial t_n} + \frac{\partial H_m}{\partial x_n} \right) = e_k e_n \frac{\partial E_n}{\partial t} - e_n e_n \frac{\partial E_k}{\partial t} + \varepsilon_{knm} \frac{\partial H_m}{\partial x_n} = 0,$$

или, в силу ортогональности $e_n E_n = 0$, есть вакуумное уравнение Максвелла

$$-\frac{\partial E_k}{\partial t} + \varepsilon_{knm} \frac{\partial H_m}{\partial x_n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{E}} - rot\,\vec{H} = 0.$$

Наконец, второе уравнение пары (6.4-25) при переходе принимает вид

$$\varepsilon_{knm} \left(-e_n \frac{\partial H_m}{\partial t} + \varepsilon_{mlj} e_l \frac{\partial E_j}{\partial x_n} \right) = -\varepsilon_{knm} e_n \frac{\partial H_m}{\partial t} + e_k \frac{\partial E_n}{\partial x_n} - e_n \frac{\partial E_n}{\partial x_k} = 0;$$

сверка последнего равенства с e_k и учет условия ортогональности всех пространственных векторов направлению времени приводи к последнему вакуумному уравнению Максвелла

$$\frac{\partial E_n}{\partial x_n} = 0, \qquad \text{или} \qquad div\,\vec{E} = 0.$$

В свою очередь, как легко видеть, уравнения (6.4-26), (6.4-27) при выполнении вышеуказанных условий переходят в стандартные уравнения для потенциалов

$$\left(e_k e_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right) A_n - e_k e_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\partial_{tt} - \Delta)\, A_n = 0,$$

$$e_n \left(e_k e_k \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right) \varphi + e_k \frac{\partial^2 A_n}{\partial t \partial x_k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (\partial_{tt} - \Delta)\, \varphi = 0.$$

Таким образом, показано, что при переходе (6.4-28) все соотношения шестимерного аналога электродинамики становятся соотношениями четырехмерной теории Максвелла.

О решениях уравнений 6D-аналога электродинамики

Небезынтересны решения системы (6.4-26), (6.4-27). Несложно видеть, что при ортогональной поляризации векторов α_k, β_k или при зависимости этих векторов только от ортогональных координат (t_k, x_n), $k \neq n$, полевые уравнения редуцируются к симметричной системе с

6-мерным оператором Даламбера, при этом множество решений ограничивается зависимостью лишь от волновых аргументов.

Любопытнее рассмотреть более общий случай, в котором были бы задействованы все специфические члены рассматриваемой системы уравнений. Это можно сделать, если заметить, что уравнения (6.4-26), (6.4-27) представляют собой действительную и мнимую компоненты комплексного уравнения Лапласа

$$\frac{d^2\Lambda_n}{dz_k dz_k} = 0 \tag{6.4-33}$$

с оператором дифференцирования

$$\frac{d}{dz_k} \equiv i\frac{d}{dt_k} + \frac{d}{dx_k} = 0 \tag{6.4-34}$$

и комплексным потенциалом

$$\Lambda_n(z_k) \equiv \alpha_n(z_k) - i\beta_n(z_k)\,. \tag{6.4-35}$$

Волновые решения уравнений (6.4-33) могут быть только линейными по изотропным координатам

$$\alpha_k, \beta_k \sim t_k \pm x_k\,.$$

Известно, что подобного вида потенциалы иногда используются при описании взаимодействия частиц на сверхмалых расстояниях (например, в работе [99], где линейные потенциалы теории прямого межчастичного взаимодействия применены для построения приближенной модели «кваркониума»). Кроме этого, уравнение (6.4-33) имеет множество других решений вида

$$\Lambda_n = a_n \exp[f(z_k)], \tag{6.4-37}$$

где a_n – постоянные, $f(z_k)$ – функция аргумента $z_k = x_k + it_k$. В частности (и это легко проверить прямой подстановкой), имеется решение $f(z_k) = z_k z_k = b(x^2 - t^2) + 2ib\,t_k x_k$, удовлетворяющее, конечно, и условиям калибровки (6.4-21). В зависимости от выбора знака коэффициента $b = const$ получаются как возрастающие так и убывающие решения, например

$$\alpha_n = a_n e^{-b(t^2 - x^2)} \cos 2bt_k x_k\,, \qquad \beta_n = a_n e^{-b(t^2 - x^2)} \sin 2bt_k x_k\,.$$

Видно, что эти потенциалы могут соответствовать частицам, имеющим как корпускулярные, так и волновые свойства одновременно, но при этом такие частицы обязаны появляться парами. Потенциалы таких пар, «нормально затухающие» в области положительно определенного интервала, имеют чисто волновую структуру на изотропной поверхности и описывают стоячие волны. В случае ортогональности временной и пространственной координат необходимость «парности» исчезает, и, как отмечено выше, решения остаются чисто волновыми.

Таким образом, в шестимерном пространстве, индуцированном свойствами кватернионных пространств, с помощью линейных уравнений, возникающих как 6D-аналог уравнений электродинамики, можно описывать частицы, обнаруживающие весьма «физичные» свойства. Впрочем, приведенный пример далеко не исчерпывает всего множества возможных решений весьма симметричных полевых уравнений 6D-электродинамики (6.4-33), (6.4-34), (6.4-35), заслуживающих, как представляется, дальнейшего анализа.